

تمارين (١)

١. ما عدد المستويات التي تمر بكل مما يأتي :-

(أ) نقطة معلومة (ب) نقطتين معلومتين (ج) ثلاث نقاط معلومة

الحل:

عدد المستويات التي تمر بكل من :

عدد المستويات	نقطة معلومة	(أ)
عدد لانهازي	نقطتين معلومتين	(ب)
عدد لانهازي	على استقامة واحدة	(ج)
واحد فقط	ليست على استقامة واحدة	

٢. ضع علامة (✓) أمام التكملة الصائبة وعلامة (×) أمام التكملة الخاطئة

فيما يلي :-

أولاً : يتقاطع المستويان في

(أ) نقطة (ب) مستقيم (ج) مستو

ثانياً : ص ، ص مستويان متوازيان ، ل مستقيم ، أ نقطة فيكون

(أ) $س \cap ص = ل$

(ب) $س \cap ص = \{ أ \}$

(ج) $س \cap ص = \Phi$

الحل:

أولاً : يتقاطع المستويان في

(أ) نقطة (×)

(ب) مستقيم (✓)

(ج) مستو (×)

ثانياً :

(أ) $س \cap ص = ل$ (×)

(ب) $س \cap ص = \{ أ \}$ (×)

(ج) $س \cap ص = \Phi$ (✓)

٣. ضع علامة (✓) أمام التكملة الصائبة وعلامة (×) أمام التكملة الخاطئة

فيما يلي :-

بفرض أن ل مستقيم ، س مستوى ، أ نقطة

(أ) إذا كان : $س \cap ل = \{ أ \}$ فإن $ل \supset س$

(ب) إذا كان : $س \cap ل = \Phi$ فإن $ل // س$

(ج) إذا كان $ل \supset س$ فإن $س \cap ل = \Phi$

(د) إذا كان : ل يوازي س فإن $س \cap ل = \{ أ \}$

الحل:

(أ) إذا كان $س \cap ل = \{ أ \}$ فإن $ل \supset س$ (×)

(ب) إذا كان $س \cap ل = \Phi$ فإن $ل // س$ (✓)

(ج) إذا كان $ل \supset س$ فإن $س \cap ل = \Phi$ (×)

(د) إذا كان $ل // س$ فإن $س \cap ل = \{ أ \}$ (×)

٤.

إذا كان ل ، ل ، مستقيمين مختلفين متقاطعين في نقطة أ ، ل ، المستوى

س ، ل ، مستوى آخر ص وتوجد نقطة أخرى ب تقع على ل وتنتمي

للمستوى س وتوجد نقطة أخرى ج تقع على ل وتنتمي للمستوى ص .

فارسم شكلاً يبين ذلك ثم اكمل :

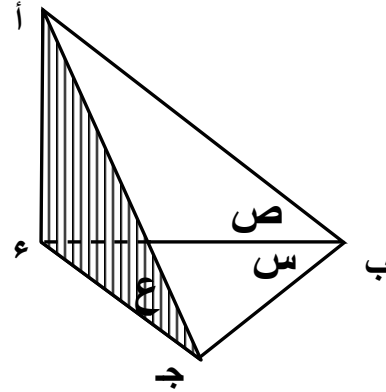
(أ) المستوى ب أ ج $س \cap ص =$

(ب) المستوى ج أ ب $س \cap ص =$

(ج) $س \cap ص \cap$ المستوى ب أ ج $=$

غير مستويين ثم ضعهما بهذه الصورة على نضد افقى سطحة يمثل المستوى س بحيث تقع النقط ب ، ع ، ج فى المستوى س . فإذا رمزنا للمستوى الذى تعينه النقط أ ، ب ، ع بالرمز ص ، والمستوى الذى تعينه النقط أ ، ع ، ج بالرمز ع فإن رسم شكل يمثل المستويات الثلاثة س ، ص ، ع واكمل :

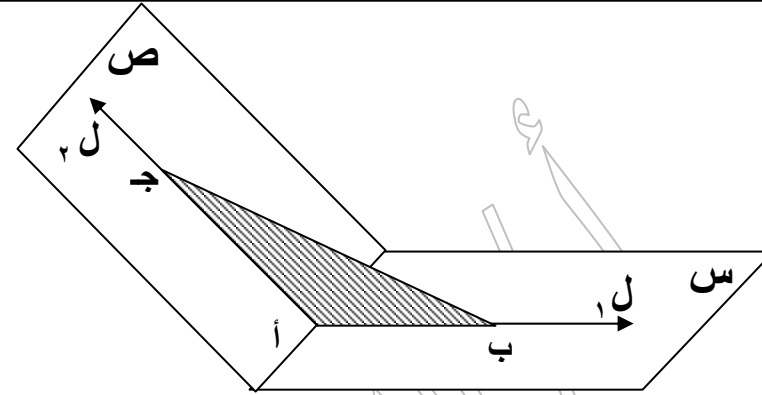
- (أ) $\overrightarrow{ص} \cap \overrightarrow{س} = \dots\dots\dots$ (ب) $\overrightarrow{ع} \cap \overrightarrow{س} = \dots\dots\dots$
 (ج) $\overrightarrow{ص} \cap \overrightarrow{ع} = \dots\dots\dots$ (د) $\overrightarrow{أب} \cap \overrightarrow{س} = \dots\dots\dots$
 (هـ) $\overrightarrow{أع} \cap \overrightarrow{س} = \dots\dots\dots$ (و) $\overrightarrow{جـع} \cap \overrightarrow{ع} = \dots\dots\dots$
 (ز) $\overrightarrow{س} \cap (\overrightarrow{ع} \cap \overrightarrow{ص}) = \dots\dots\dots$



الحل:

- (أ) $\overrightarrow{ص} \cap \overrightarrow{س} = \overrightarrow{أب}$ (ب) $\overrightarrow{ع} \cap \overrightarrow{س} = \overrightarrow{جـع}$
 (ج) $\overrightarrow{ص} \cap \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{أع}$ (د) $\overrightarrow{أب} \cap \overrightarrow{س} = \{ب\}$
 (هـ) $\overrightarrow{أع} \cap \overrightarrow{س} = \{ع\}$ (و) $\overrightarrow{جـع} \cap \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{جـع}$
 (ز) $\overrightarrow{س} \cap (\overrightarrow{ع} \cap \overrightarrow{ص}) = \{ع\}$

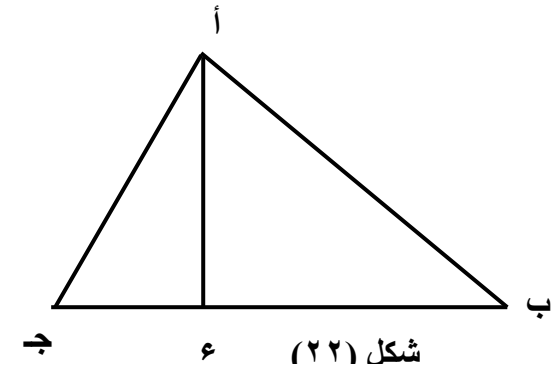
٦. المستويان س ، ص متقاطعان فى $\overrightarrow{أب}$ شكل (٢٣)



الحل:

- (أ) المستوى ب أ ج $\cap$ ص = $\overrightarrow{أح}$
 (ب) المستوى ج أ ب $\cap$ س = $\overrightarrow{أب}$
 (ج) $\overrightarrow{س} \cap \overrightarrow{ص} \cap$ المستوى ب أ ج = $\{أ\}$

٥.



شكل (٢٢)

اعد رسم الشكل المبين على قطعة من الورق المقوى . اقطع المثلث أب ج واطوى هذا المثلث عند $\overrightarrow{أع}$ لتحصل على مثلثين أب ع ، ا ج ع

انقل هذا الرسم في كراستك واضف إليه مستقيما يقطع المستوى س في نقطة جـ $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطع المستوى ص في نقطة د $\overleftrightarrow{AB}$. ارسم

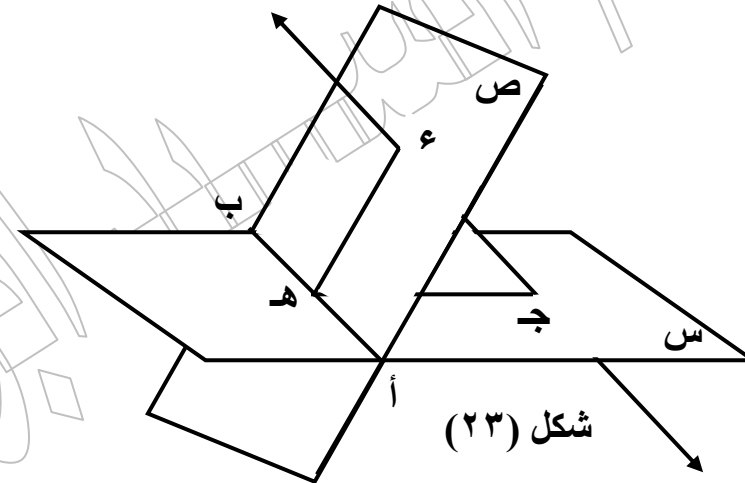
المستوى جـ د هـ حيث هـ $\in$ $\overleftrightarrow{AB}$. ثم اكمل العبارات الآتية :

(أ) المستوى س $\cap$ المستوى جـ د هـ =

(ب) المستوى جـ د هـ $\cap$ المستوى ص =

(ج) المستوى جـ د هـ $\cap$ $\overleftrightarrow{AB}$ =

(د) المستوى س $\cap$ المستوى ص $\cap$ المستوى جـ د هـ =



الحل:

(أ) المستوى س $\cap$ المستوى جـ د هـ = $\overleftrightarrow{JH}$

(ب) المستوى جـ د هـ $\cap$ المستوى ص = $\overleftrightarrow{HE}$

(ج) المستوى جـ د هـ $\cap$ $\overleftrightarrow{AB}$ = { هـ }

(د) المستوى س $\cap$ المستوى ص $\cap$ المستوى جـ د هـ = { هـ }

تمارين (٢)

في شكل (٣٦) : $\overleftrightarrow{AB}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{AE}$ ، $\overleftrightarrow{AE}$ متوازي مستطيلات

أجب عن الأسئلة (١) ، (٢) ، (٣)

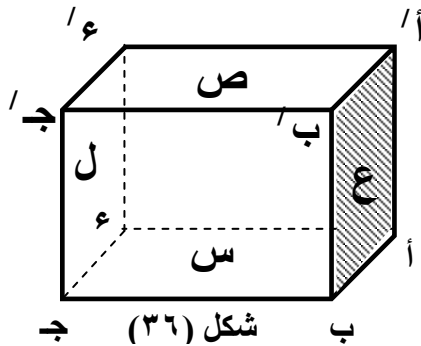
١. ما العلاقة بين كل زوج من المستويات الآتية ؟ مع تعيين خط التقاطع في حالة تقاطع مستويين .

(أ) س ، ص

(ب) س ، ع

(ج) ص ، ل

(د) ع ، ل



الحل:

(أ) س ، ص متوازيان

(ب) س ، ع متقاطعان في $\overleftrightarrow{AE}$

(ج) ص ، ل متقاطعان في $\overleftrightarrow{AE}$

(د) ع ، ل متوازيان

٢. اكمل :

(أ) $\overleftrightarrow{AB} \supset$ المستوى ، $\overleftrightarrow{AB} \supset$ المستوى

(ب) $\overleftrightarrow{AE} \parallel$ كل من المستويين ، ويقطع المستوى في جـ

(ج) (المستوى ص $\cap$ المستوى = $\overleftrightarrow{AE}$ ، المستوى ع $\cap$

المستوى ل =)

(د) $\overleftrightarrow{AE}$ المستوى س ، ويقطع المستوى ع في النقطة

(الحل):

من الرسم السابق

(أ) $\overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{S}$ ، $\overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{E}$

(ب) $\overrightarrow{E} \supset \overrightarrow{J}$ // كل من المستويين ص ، ع ويقطع المستوى ب ج د ب' في ج

(ج) المستوى ص $\cap$ المستوى أ ع أ' = أ' أ' ع' /

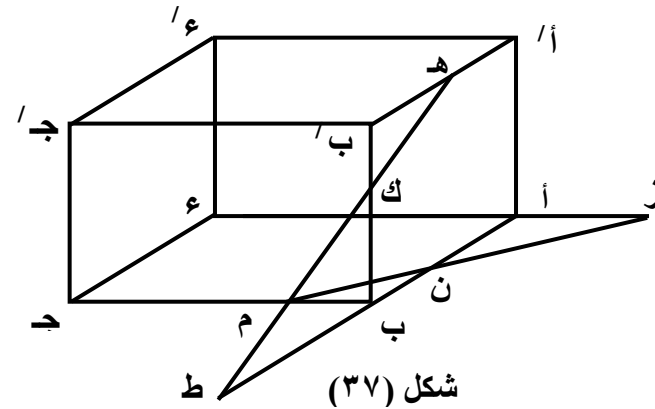
، المستوى ع $\cap$ المستوى ل = Φ

(د) $\overrightarrow{AE} \supset \overrightarrow{S}$ ، ويقطع المستوى ع في النقطة أ

٣. انقل شكل (٣٧) في كراستك :

(أ) خذ نقطة م د ب ج ، نقطة مثل ن د أ ب ثم بين بالرسم أين يتقاطع م ن والمستوى أ أ' ع' .

(ب) خذ نقطة ه د أ' ب' ، نقطة ك د ب ب' ثم بين بالرسم أين يتقاطع ه ك والمستوى أ ب ج د .



(الحل):

(أ) م ن $\cap$ المستوى أ أ' ع' = { ز }

(ب) ه ك $\cap$ المستوى أ ب ج د = { ط }

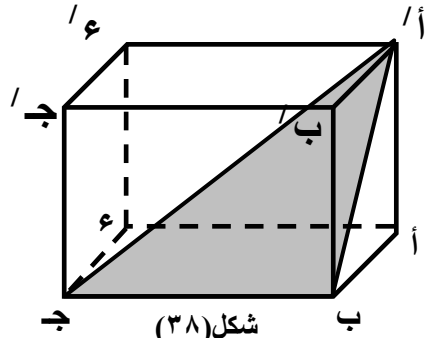
٤. في شكل (٣٨) : أ ب ج د ع أ' ب' ج' د' مكعب اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين (متقاطعان - متطابقان - متوازيان) لكل من الأزواج الآتية

(أ) $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{A'B'}$

(ب) المستويان أ' ب' ج' د' ، أ ب ج د

(ج) المستويان أ' ب' ج' د' ، أ' ب' ج' د'

(د) المستويان أ ب ج د ، أ ب ج د



(الحل):

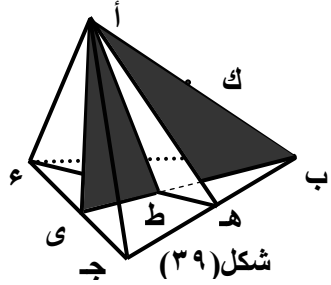
(أ) $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{A'B'}$ متوازيان

(ب) المستويان أ' ب' ج' د' ، أ ب ج د متوازيان

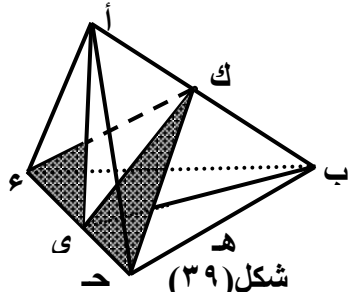
(ج) المستويان أ' ب' ج' د' ، أ' ب' ج' د' متطابقان

(د) المستويان أ ب ج د ، أ ب ج د متقاطعان

٥. انقل المكعب شكل (٣٨) في كراستك



المستوى أ ب ي $\cap$ المستوى أ ع هـ = أ ط
حيث ط هي نقطة تقاطع هـ ع مع ب ي

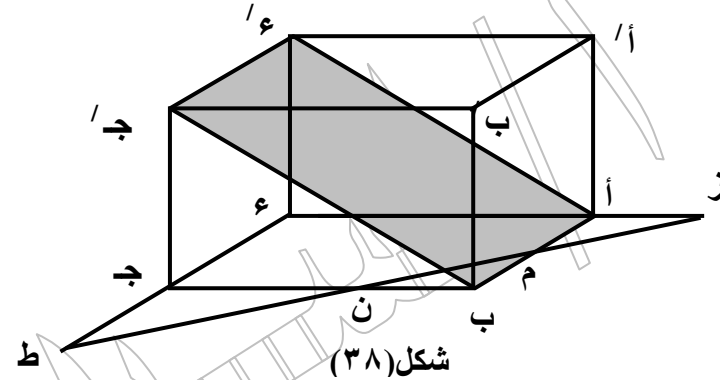


المستوى أ ب ي $\cap$ المستوى ج د ع ك = ك ي

٧. في شكل (٤٠) : أ ب ج د أ' ب' ج' يسمى هرمًا ثلاثيًا ناقصًا متوازي القاعدتين وقاعدته أ ب ج ، أ' ب' ج' متوازيان . س ترمز للمستوى الذي يحوي الوجه الجانبي أ' ب' ج' ، ص ترمز للمستوى الذي يحوي الوجه ب' ج' د' ، ع ترمز للمستوى الذي يحوي الوجه أ' ج' د' . أكمل :

- (أ) (أ) س $\cap$ ع =
(ب) س $\cap$ ص =
(ج) ص $\cap$ ع =
(د) س $\cap$ ص $\cap$ ع =
(هـ) س $\cap$ المستوى أ ب ج =
(و) ص $\cap$ المستوى أ' ب' ج' =

(أ) خذ نقطة م د أ ب ، ن د ب ج ثم بين بالرسم أين يتقاطع م ن مع كل من المستويين أ' ع د د' ، أ' أ ع ع'
(ب) بين بالرسم أين يقطع ج ب المستوى أ ب ج' ع'



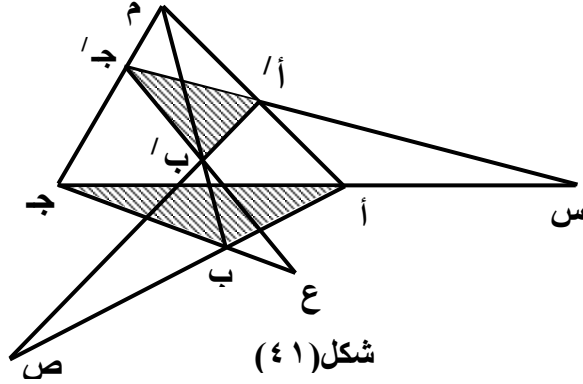
الحل:

- (أ) م ن $\cap$ المستوى أ' ع د د' = { ط }
م ن $\cap$ المستوى أ' أ ع ع' = { ز }
(ب) ج ب $\cap$ المستوى أ ب ج' ع' = { ب }

٦. أ ب ج د هرم ثلاثي ، هـ ، ي ، ك منتصفات ب ج ، ج د ، د أ على الترتيب انقل الرسم في كراستك .
عين بالرسم المستقيم الذي يتقاطع فيه كل من :
(أ) المستويين أ ب ي ، أ ع هـ
(ب) المستويين أ ب ي ، ج د ك

الحل:

$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$ ، فاثبت أن : س ،
ص ، ع تنتمي لمستقيم واحد هو خط تقاطع المستويين أ ب ج ، أ' ب' ج'



شكل (٤١)

الحل:

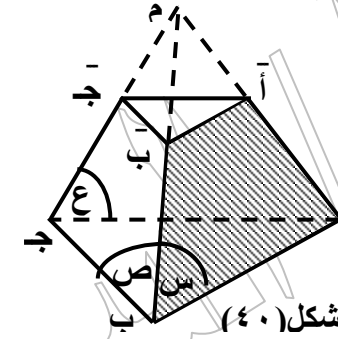
∴ س ∩ أ ج ∩ المستوي أ ب ج ⇔ س ∩ المستوي أ ب ج
س ∩ أ' ج' ∩ المستوي أ' ب' ج' ⇔ س ∩ المستوي أ' ب' ج'
س ∩ كل من المستويين أ ب ج ، أ' ب' ج'
∴ س ∩ خط تقاطع المستويين أ ب ج ، أ' ب' ج' (١)
بالمثل يمكن اثبات أن

ص ∩ خط تقاطع المستويين أ ب ج ، أ' ب' ج' (٢)
ع ∩ خط تقاطع المستويين أ ب ج ، أ' ب' ج' (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن س ، ص ، ع ∩ إلى خط مستقيم واحد
وهو خط تقاطع المستويين أ ب ج ، أ' ب' ج'

تمارين (٣)

(ز) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$
(ح) المستوي أ' ب' ج' ∩ المستوي أ ب ج =



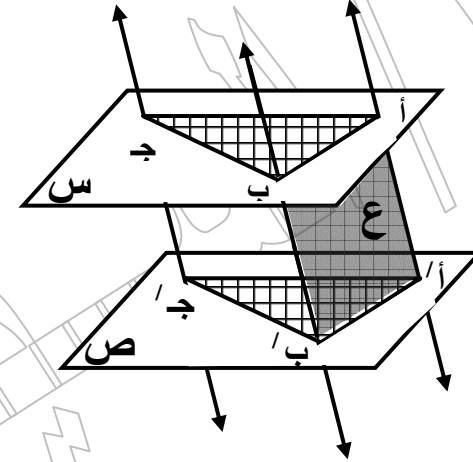
الحل:

(أ) $\overrightarrow{AA'} = س \cap ع$
(ب) $\overrightarrow{BB'} = س \cap ص$
(ج) $\overrightarrow{CC'} = ص \cap ع$
(د) $\{M\} = س \cap ص \cap ع$
(هـ) $س \cap \text{المستوي أ ب ج} = \overrightarrow{AB}$
(و) $ص \cap \text{المستوي أ' ب' ج'} = \overrightarrow{A'B'}$
(ز) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \Phi$
(ح) المستوي أ' ب' ج' ∩ المستوي أ ب ج = Φ

٨. في شكل (٤١)

م أ ب ج هرم ثلاثي ، المستوي أ' ب' ج' يقطع أحرفه م أ ، م ب ، م ج
في النقط أ' ، ب' ، ج' فإذا كان $\overrightarrow{A'B'} \cap \overrightarrow{A'C'} = \{S\}$ ، أ ب

١. $\overrightarrow{AA'}$ ، $\overrightarrow{BB'}$ ، $\overrightarrow{JJ'}$ ثلاثة مستقيمات متوازية ليست في مستوى واحد ، قطعها المستوى S في النقط A ، B ، J ، وقطعها المستوى V في النقط A' ، B' ، J' على الترتيب اثبت أن $\Delta ABJ \equiv \Delta A'B'J'$



الحل:

∴ $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'} \parallel \overrightarrow{JJ'}$ (١)
∴ فهما يعينان مستويين وليكن ع

∴ المستوى ع قطع المستويين المتوازيين س ، ص في $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{A'B'}$

∴ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ متوازي أضلاع

∴ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (٣)

بالمثل $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{B'B'}$ (٤)

، $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{A'J'}$ (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) ينتج أن $\Delta ABJ \equiv \Delta A'B'J'$

الحل:

(أ) في شكل (١)

المستوى م $\cap$ م ب ج = م و

(ب) في شكل (٢)

المستوى م $\cap$ م ب ج = م هـ

حيث $\overrightarrow{م هـ} \parallel \overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{ع ج}$

تفسير الحل :

$\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{ع ج}$ ، $\overrightarrow{أ ب} \supset$ المستوى أ م ب ، $\overrightarrow{ع ج} \supset$ المستوى م ب ج

خط تقاطع المستويين أ م ب ، م ب ج هو المستقيم م هـ يوازي كل من

المستقيمين $\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{ع ج}$

$$\text{بالمثل } \frac{1}{3} = \frac{ن ك}{ل ع} , \frac{1}{3} = \frac{م ك}{ص ل}$$

$$\frac{م ن}{ص ع} = \frac{ن ك}{ل ع} = \frac{م ك}{ص ل} = \frac{1}{3}$$

∴ Δ م ن ك ~ Δ ص ع ل ومن التشابه ينتج أن

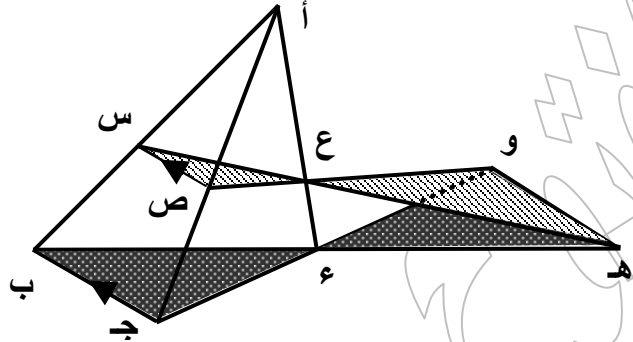
$$(ب) \frac{م (Δ م ن ك)}{م (Δ ص ع ل)} = \left(\frac{ن ك}{ل ع} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2$$

$$\frac{م (Δ م ن ك)}{٢٧٠} = \frac{1}{٩} \Leftarrow م (Δ م ن ك) = ٣٠ سم^2$$

٤. أ ب ج د هـ هـم ثلاثي، س د أ ب، ص د أ ج، ع د أ هـ فإذا كان

س ص // ب ج وكان س ع يقطع ب هـ في هـ، ص ع يقطع ج هـ

في هـ أثبت أن : هـ و // س ص



الحل:

∴ س ص // ب ج

والمستوى س ص هـ و يحوي س ص، المستوى ب ج هـ و يحوي ب ج

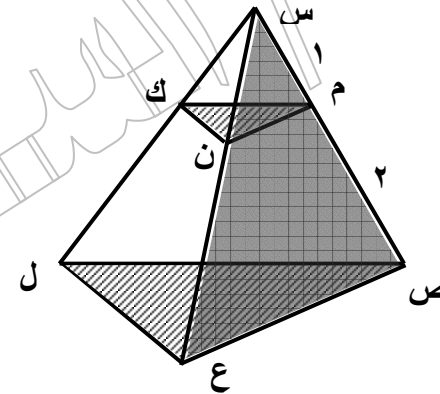
و خط تقاطع المستويين هو هـ و

∴ هـ و // س ص // ب ج

س ص ع ل هرم ثلاثي رأسه س، أخذت نقطة م د س ص بحيث
س م : م ص = ١ : ٢ ورسم مستوى يمر بالنقطة م موازيا للمستوى
ص ع ل ويقطع س ع في ن، س ل في ك أثبت أن :

(أ) Δ م ن ك ~ Δ ص ع ل

(ب) إذا كانت م (Δ ص ع ل) = ٢٧٠ سم^٢ فاحسب م (Δ م ن ك)



الحل:

∴ المستوى س ص ع يقطع المستويين المتوازيين م ن ك، ص ع ل

في م ن، ص ع ∴ م ن // ص ع

بالمثل ن ك // ع ل

، م ك // ص ل

في Δ س ص ع ∴ م ن // ص ع

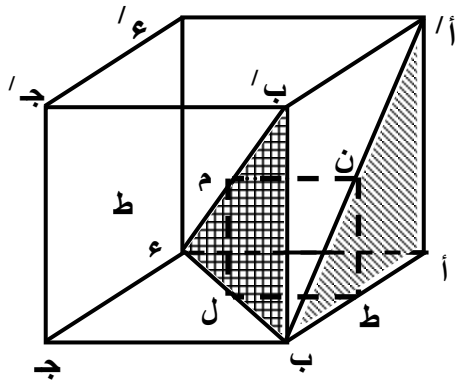
∴ Δ س م ن ~ Δ س ص ع

$$\frac{م ن}{ص ع} = \frac{س م}{س ص} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AB}{EH} = \frac{BJ}{HO} \iff \frac{AB}{BJ} = \frac{EH}{HO}$$

.....

٦. أ ب ج د أ' ب' ج' د' متوازي سطوح ، م نقطة تقاطع أقطاره ، ط ، ل ، هـ منتصفان أ ب ، ب' ع' ، أ' ب على الترتيب . أثبت أن : الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع .



الحل:

في $\triangle A'AB'$

ط ن قطعة مستقيمة واصله بين منتصفي الضلعين ب' أ ، ب أ' /
 $\overline{PN} \parallel \overline{AA'}$ ، $\text{طن} = \frac{1}{2} \overline{AA'}$ (١)

في $\triangle A'EB'$

م ل قطعة مستقيمة واصله بين منتصفي الضلعين ب' ع' ، ع' ب' /
 $\overline{ML} \parallel \overline{B'B'}$ ، $\text{م ل} = \frac{1}{2} \overline{B'B'}$ (٢)

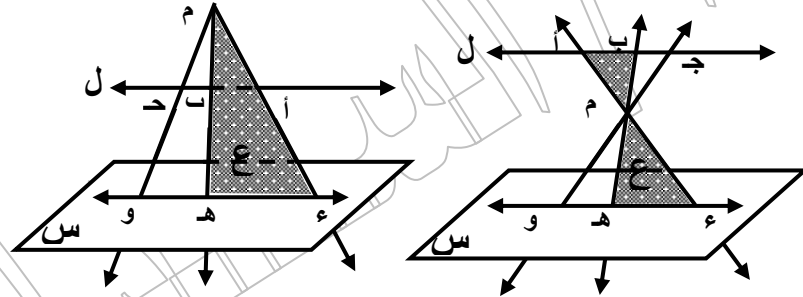
من خواص متوازي الأضلاع أ ب ب' أ' /

أ' / // ب' ب' ويساويه في الطول (٣)

.....
 ٥. أ ، ب ، ج ثلاث نقط مختلفة تنتمي إلى مستقيم واحد ل يوازي مستوى مثل

س ، م يح ل ، م يح س ، المستقيمت م أ ، م ب ، م ج تقطع المستوى

س في النقط ع ، هـ ، و على الترتيب . أثبت أن : $\frac{AB}{EH} = \frac{BJ}{HO}$



الحل:

∴ أ ع ، ب هـ متقاطعان $\iff$ فهما يعينان مستو وليكن ع

∴ المستقيم ل // المستوى س ، والمستوى ع يحوي ل ويقطع المستوى س في ع هـ

$\overline{L} \parallel \overline{EH} \iff \overline{AB} \parallel \overline{EH}$

∴ $\triangle MAB \sim \triangle MEH$

$\frac{AB}{EH} = \frac{MB}{MH}$ (١)

بالمثل $\overline{L} \parallel \overline{HO} \iff \overline{BJ} \parallel \overline{HO}$

∴ $\triangle MBJ \sim \triangle MHO$

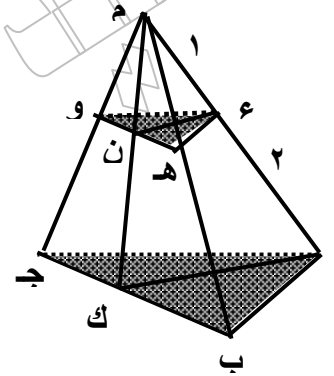
$\frac{BJ}{HO} = \frac{MB}{MH}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن
 $\overline{طن} // \overline{م ل}$ ويساويه في الطول
 الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع

تمارين (٤)

١. م أ ب ج هرم ثلاثي أخذت النقط ء ، هـ ، و على الأحرف م أ ، م ب ، م ج على الترتيب بحيث كان : $\frac{م أ}{هـ أ} = \frac{م ب}{هـ ب} = \frac{م ج}{هـ ج} = \frac{١}{٢}$ أثبت أن :
 المستوى ء هـ و // المستوى أ ب ج



الحل:

$$\frac{م أ}{هـ أ} = \frac{م ب}{هـ ب}$$

∴ $\overline{هـ أ} // \overline{أ ب}$ (١)

بالمثل $\overline{هـ و} // \overline{أ ب ج}$ (٢)

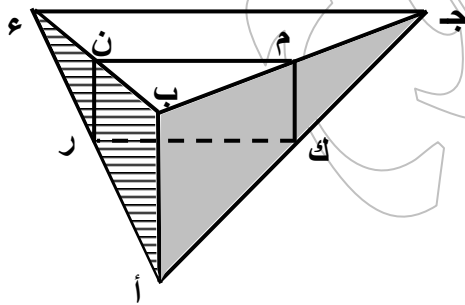
من (١)، (٢) ينتج أن

المستوى ء هـ و // المستوى أ ب ج

٢. في التمرين السابق إذا أخذنا نقطة ك د ب ج ورسمنا م ك فقطعت هـ و
 في ن فأثبت أن : أولاً : $\overline{هـ ن} // \overline{أ ك}$ ثانياً : $أ ك = ٣ هـ ن$
 الحل :

∴ المستوى م أ ك يقطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب ج في
 $\overline{هـ ن}$ ، $\overline{أ ك} \leftarrow \overline{هـ ن} // \overline{أ ك}$
 $\Delta م هـ ن \sim \Delta م أ ك$
 $\frac{هـ ن}{أ ك} = \frac{م هـ}{م أ} \leftarrow \frac{هـ ن}{أ ك} = \frac{١}{٣} \leftarrow أ ك = ٣ هـ ن$

٣. أ ب ج د هرم ثلاثي ، م د ب ج رسم المستوى س يمر بالنقطة م
 ويوازي كلاً من أ ب ، ج د فقطع ب د في نقطة ن ، أ د في نقطة ك ،
 أ ء في نقطة ر . أثبت أن :
 أولاً : الشكل م ن ر ك متوازي أضلاع
 ثانياً : إذا كان أ ب = ج د ، م منتصف ب ج فإن الشكل م ن ر ك
 يكون معيناً .



الحل:

المستوى م ن ر ك هو المستوى س

∴ $\overline{أب} // \text{المستوى س}$ ، المستوى $\overline{أب}$ يحوى $\overline{أب}$ ويقطع المستوى س في م ك

∴ $\overline{أب} // \overline{م ك}$ (١)

بالمثل ن ر // $\overline{أب}$ (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن

$\overline{م ك} // \overline{ن ر}$ (٣)

∴ $\overline{ج د} // \text{المستوى س}$ ، المستوى $\overline{ب ج د}$ يحوى $\overline{ج د}$ ويقطع المستوى س في م ن

∴ $\overline{ج د} // \overline{م ن}$ (٤)

بالمثل $\overline{ج د} // \overline{ك ر}$ (٥)
من (٤) ، (٥) ينتج أن

$\overline{م ن} // \overline{ك ر}$ (٦)

من (٣) ، (٦) ينتج أن الشكل م ن ر ك متوازي أضلاع
ثانياً :

في $\Delta ج أ ب$

ك ، م منتصفى الضلعين ج أ ، ج ب $\Leftarrow$ ك م = $\frac{1}{2}$ $\overline{أب}$

بالمثل م ن = $\frac{1}{2}$ $\overline{ج د}$

∴ $\overline{أب} = \overline{ج د}$

∴ $\frac{1}{2} \overline{أب} = \frac{1}{2} \overline{ج د}$

∴ ك م = م ن (٧)

من (٦) ، (٧) ينتج أن الشكل م ن ر ك معيناً

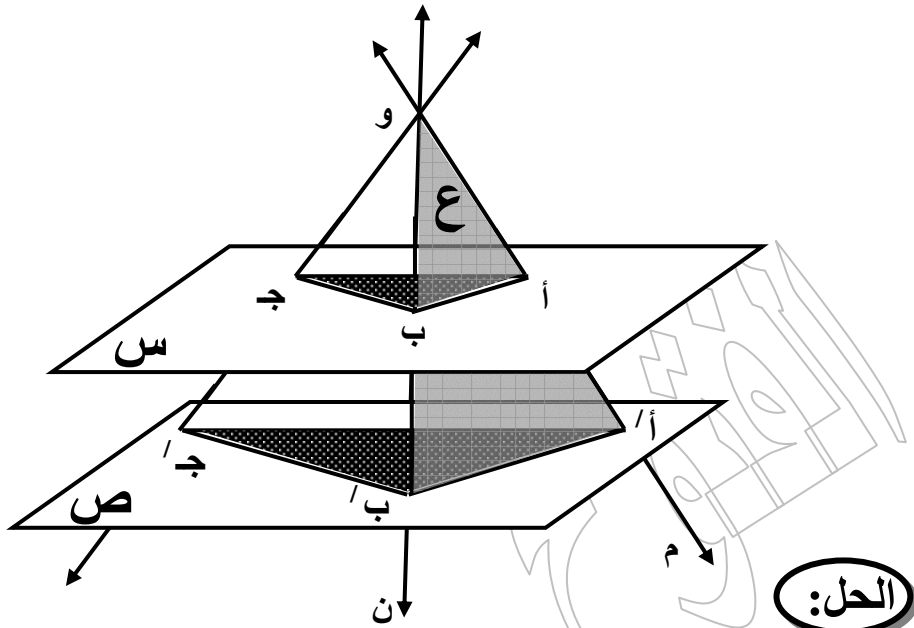
٤. وم ، ون مستقيمان متقاطعان ويقطعان مستويين متوازيين س ، ص .

وم يقطعهما في أ ، أ' ، ون يقطعهما في ب ، ب' على الترتيب

اثبت أن $\overline{أب} // \overline{أ' ب'}$ ، وإذا كانت ج نقطة في المستوى س بحيث

ج $\notin \overline{أب}$ وقطع $\overline{ج و}$ المستوى ص في نقطة ج' فاثبت أن

$\Delta أ ب ج \sim \Delta أ' ب' ج'$

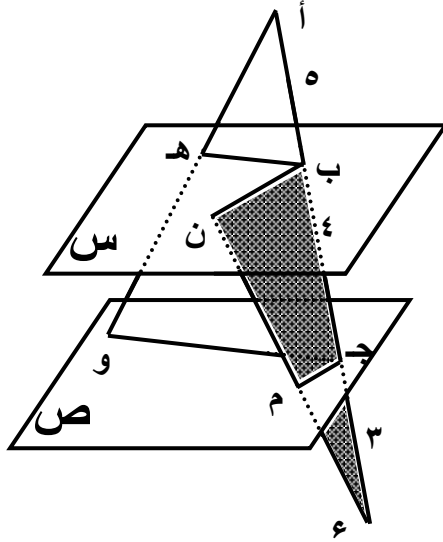


الحل:

∴ وم ، ون مستقيمان متقاطعان

∴ فهما يعينان مستويين وليكن المستوى ع

∴ المستوى ع قطع المستويين المتوازيين س ، ص في $\overline{أب}$ ، $\overline{أ' ب'}$



الحل:

المستوى ϵ ب ن قطع المستويين المتوازيين ص ، س في ج م ، ب ن

ج م // ب ن

$\Delta \epsilon$ ج م ~ $\Delta \epsilon$ ب ن

$$\frac{م ج}{ن ب} = \frac{ج \epsilon}{ب \epsilon} = \frac{٣}{٧} \quad (١)$$

المستوى أ ج و قطع المستويين المتوازيين ص ، س في ب هـ ، ج و

ب هـ // ج و

Δ أ ب هـ ~ Δ أ ج و

$$\frac{ب هـ}{ج و} = \frac{أ ب}{أ ج} = \frac{٥}{٩} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن

$$\frac{م ج}{ن ب} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٥}{٢١}$$

$\therefore \overline{أ ب} // \overline{أ ب'}$

بالمثل $\overline{ب ج} // \overline{ب ج'}$ ، $\overline{أ ج} // \overline{أ ج'}$

في Δ و Δ ب' $\therefore \overline{أ ب} // \overline{أ ب'}$

$$\therefore \frac{أ ب}{أ ب'} = \frac{و ب}{و ب'} = \frac{أ}{أ'} \quad (١)$$

$$\text{بالمثل} \quad \frac{ب ج}{ب ج'} = \frac{و ب}{و ب'} = \frac{و ج}{و ج'} \quad (٢)$$

$$\text{بالمثل} \quad \frac{أ ج}{أ ج'} = \frac{و ج}{و ج'} = \frac{أ}{أ'} \quad (٣)$$

$$\text{من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن} \quad \frac{أ ب}{أ ب'} = \frac{ب ج}{ب ج'} = \frac{أ ج}{أ ج'}$$

$\therefore \Delta$ أ ب ج ~ Δ أ' ب' ج'

في شكل (٥٣) : س ، ص مستويان متوازيان ،

أ ϵ يقطع المستويين في ب ، ج على الترتيب بحيث كان أ ب : ب ج : ج ϵ

= ٥ : ٤ : ٣ ، أو يقطع س ، ص في النقطتين هـ ، و ، ϵ ن يقطعهما

$$\text{في م ، ن . أثبت أن : } \frac{م ج}{ن ب} \times \frac{ب هـ}{ج و} = \frac{٥}{٢١}$$

في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب
 $(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow أ ج = 5$ سم
 أ ج // ع و لماذا ؟

$$\therefore \frac{أ ج}{ع و} = \frac{أ ب}{م ع} = \frac{ب ج}{م هـ} \Rightarrow \frac{5}{ع و} = \frac{3}{م ع} = \frac{4}{م هـ} \Rightarrow ع و = 30 \text{ سم}$$

في Δ ع هـ و

$$90^\circ = 576 + 234 = 2(هـ و) + 2(هـ ع)$$

$$90^\circ = 2(و ع)$$

$$\therefore 2(و ع) = 2(هـ ع) + 2(هـ و)$$

$$\therefore ق(هـ و) = 90^\circ$$

$$م(\Delta هـ و ع) = \frac{1}{2} هـ و \times هـ ع = \frac{1}{2} \times 24 \times 18 = 216 \text{ سم}^2$$

٧. م أ ب ج هرم ثلاثي أخذت نقطة س د م أ بحيث م س : م أ يساوي
 ١ : ٤ رسم مستوى يمر بالنقطة س موازياً للمستوى أ ب ج ، ويقطع
 م ب في ص ، م ج في ع .

(أولاً) أثبت أن : المثلث س ص ع يشابه المثلث أ ب ج

(ثانياً) إذا كانت مساحة سطح المثلث أ ب ج تساوي ٨٠ سم^٢ فأحسب
 مساحة سطح المثلث س ص ع .

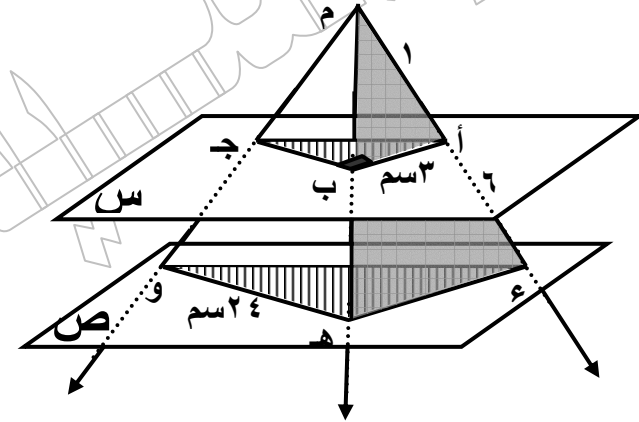
٦. س ، ص مستويان متوازيان ، م نقطة خارجهما . رسم م أ ، م ب ،
 م ج . فقطعت المستوى س في أ ، ب ، ج ، المستوى ص في ع ، هـ ، و

على الترتيب فإذا كان $\frac{أ م}{ع م} = \frac{١}{٦}$ ، أ ب = ٣ سم ، هـ و = ٢٤ سم

$$ق(أ ب ج) = 90^\circ$$

$$(١) \text{ اثبت أن : ق(هـ و ع) } = 90^\circ$$

(٢) احسب مساحة سطح المثلث ع هـ و



الحل:

∴ المستوى م ع هـ قطع المستويين المتوازيين س ، ص في أ ب ، ع هـ

$$\therefore أ ب // ع هـ$$

$$\therefore \Delta م أ ب \sim \Delta م ع هـ$$

$$\therefore \frac{أ ب}{ع هـ} = \frac{أ م}{ع م} = \frac{١}{٦} \Rightarrow \frac{٣}{ع هـ} = \frac{١}{٦} \Rightarrow ع هـ = ١٨ \text{ سم}$$

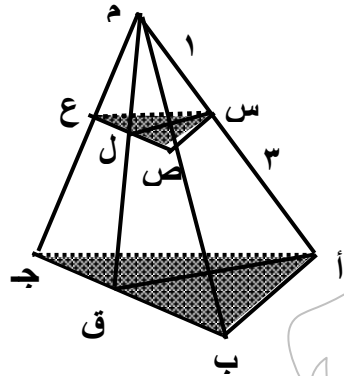
بالمثل ب ج // هـ و

$$\therefore \frac{ب ج}{هـ و} = \frac{ب م}{هـ م} = \frac{١}{٦} \Rightarrow \frac{٤}{هـ و} = \frac{١}{٦} \Rightarrow هـ و = ٢٤ \text{ سم}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{(\Delta \text{ س ص ع})}{(\Delta \text{ أ ب ج})} = \frac{(\Delta \text{ س ص ع})}{(\Delta \text{ أ ب ج})} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{(\Delta \text{ س ص ع})}{80} = \frac{1}{80} = \frac{1}{80}$$

٨.

م أ ب ج هرم ثلاثي أخذت النقط س ، ص ، ع على الأحرف م أ ، م ب ، م ج على الترتيب بحيث كان $\frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م ع}{ع ج} = \frac{1}{3}$ أثبت أن المستوى س ص ع // المستوى أ ب ج . وإذا فرضت النقطة ق و ب ج ورسمت م ق فقطعت ص ع في ل فاثبت أن أ ق = ع س ل



الحل:

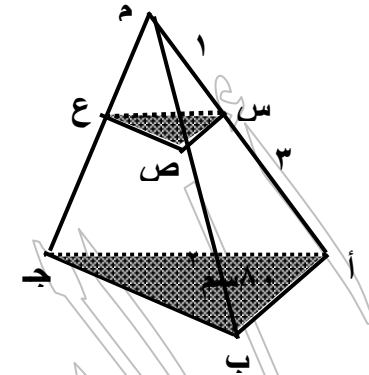
$$\frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م ع}{ع ج} = \frac{1}{3}$$

١) $\therefore$ س ص ع // أ ب ج

٢) بالمثل ص ع // ب ج

من (١) ، (٢) ينتج أن

المستوى س ص ع // المستوى أ ب ج



الحل:

١) المستوى م أ ب قطع المستويين المتوازيين س ص ع ، أ ب ج في س ص ، أ ب

٢) $\therefore$ س ص // أ ب

٣) $\Delta م س ص \sim \Delta م أ ب$

$$\therefore \frac{س ص}{أ ب} = \frac{م س}{م أ} = \frac{م ص}{م ب} = \frac{1}{4} \dots \dots \dots (١)$$

بالمثل ص ع // ب ج

$\Delta م ص ع \sim \Delta م ب ج$

$$\therefore \frac{ص ع}{ب ج} = \frac{م ص}{م ب} = \frac{1}{4} \dots \dots \dots (٢)$$

$$\text{بالمثل } \frac{س ع}{أ ج} = \frac{م س}{م أ} = \frac{1}{4} \dots \dots \dots (٣)$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\frac{س ص}{أ ب} = \frac{ص ع}{ب ج} = \frac{س ع}{أ ج} = \frac{1}{4}$$

٢) $\therefore \Delta س ص ع \sim \Delta أ ب ج$

ثانيا : من التشابه ينتج أن

ثانيا : : المستوى م أ ق يقطع المستويين المتوازيين س ص ع ، أ ب ج

في س ل ، أ ق $\Leftarrow$ س ل // أ ق

Δ م س ل $\sim \Delta$ م أ ق

$$\frac{س ل}{أ ق} = \frac{م س}{أ م} \Leftarrow \frac{س ل}{أ ق} = \frac{١}{٤} \Leftarrow أ ق = ٤ س ل$$

تمارين (٥)

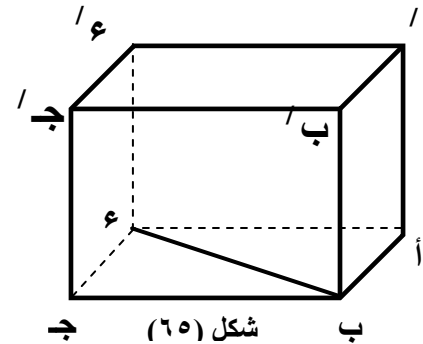
١. في شكل (٦٥) : أ ب ج ع أ' ب' ج' ع' متوازي مستطيلات

(أ) ما وضع أ أ' بالنسبة للمستوى أ ب ج ع ؟ ولماذا ؟

(ب) ما وضع أ ع بالنسبة للمستوى أ ب ب' أ' ؟ ولماذا ؟

(ج) ما وضع ب أ بالنسبة للمستوى أ ع أ' ع' ؟ ولماذا ؟

(ع) أثبت أن أ أ' $\perp$ ب ب'



شكل (٦٥)

الحل:

(أ) أ أ' $\perp$ المستوى أ ب ج ع

لأن أ أ' $\perp$ كل من المستقيمين المتقاطعين أ ع ، أ ب

(ب) ع أ $\perp$ المستوى أ ب ب' أ'

لأن ع أ $\perp$ كل من أ ب ، أ أ'

(ج) ب أ $\perp$ المستوى أ ع أ' ع'

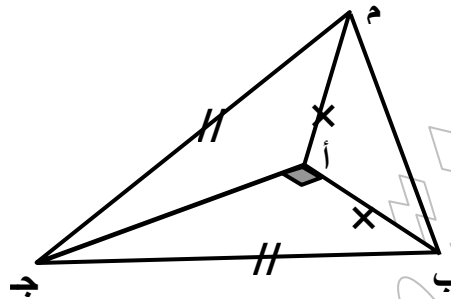
لأن ب أ $\perp$ كل من أ ع ، أ أ'

(ع) أ أ' $\perp$ المستوى أ ب ج ع ، ب ع $\supset$ المستوى أ ب ج ع

أ أ' $\perp$ ب ب'

٢. في شكل (٦٦) : أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ ، م نقطة لا تنتمي للمثلث أ ب ج ، م أ = أ ب ، م ج = ب ج أثبت أن :

أ ج $\perp$ المستوى م أ ب



شكل (٦٦)

الحل:

Δ ج أ م ، ج أ ب

ج أ ضلع مشترك

ج م = ج ب

م أ = ب أ

فيهما

$\therefore$ يتطابق المثلثان وينتج أن : ق (ج أ م) = ق (ج أ ب) = ٩٠°

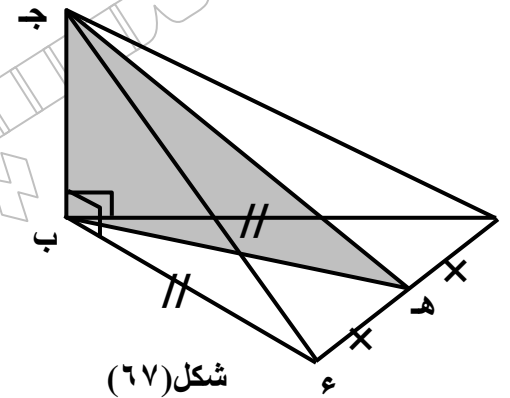
٣. في شكل (٦٧) :

إذا كان $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ فاثبت أن :

(أولاً) $\triangle ABC \equiv \triangle EBC$

(ثانياً) $\overrightarrow{BC} \perp$ المستوى ABE

(ثالثاً) $\overrightarrow{AE} \perp$ المستوى BCD حيث H منتصف $\overrightarrow{AE}$



شكل (٦٧)

الحل:

أولاً: $\triangle ABC \equiv \triangle EBC$ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BC}$ ضلع مشترك

فيهما $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

$$\left(\overrightarrow{BC} \right) \cap \left(\overrightarrow{AB} \right) = \left(\overrightarrow{BC} \right) \cap \left(\overrightarrow{BE} \right)$$

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle EBC$

ثانياً: ∴ $\overrightarrow{BC} \perp$ كل من المستقيمين المتقاطعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BE}$

∴ $\overrightarrow{BC} \perp$ مستويهما ABE

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AE}$ (١)

ثالثاً: في $\triangle ABE$ المتساوي الساقين ∴ H منتصف $\overrightarrow{AE}$

∴ $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AE}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

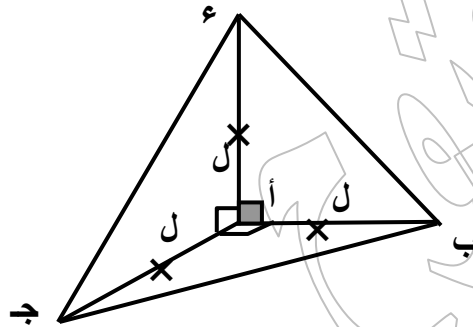
$\overrightarrow{AE} \perp$ كل من المستقيمين المتقاطعين $\overrightarrow{BH}$ ، $\overrightarrow{BC}$

∴ $\overrightarrow{AE} \perp$ مستويهما BCH

٤. النقطة A ، B ، C ، E لا تقع في مستوى واحد وكان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB} \perp$ المستوى ADE ، $\overrightarrow{AC} \perp$ المستوى ADE

ارسم شكلاً يوضح ذلك وأثبت أن $\triangle BDE$ متساوي الأضلاع



الحل:

∴ $\overrightarrow{AB} \perp$ المستوى ADE ∴ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

∴ $\overrightarrow{AC} \perp$ المستوى ADE ∴ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$

من تطابق المثلثات $\triangle$ أ ب ج ، ع أ ب ، ب أ ج ينتج أن :
 $\triangle$ ب ج ع = $\triangle$ ب ج أ = $\triangle$ ب ج ع متساوي الأضلاع

حل آخر : ————— ر :

في $\triangle$ ب أ ج :

$$\begin{aligned} \angle 2 &= \angle 1 + \angle 3 = \angle (أ ب) + \angle (أ ع) = \angle (ب ع) \\ \angle 2 &= \angle 1 + \angle 3 = \angle (أ ج) + \angle (أ ع) = \angle (ب ج) \\ \angle 2 &= \angle 1 + \angle 3 = \angle (أ ج) + \angle (أ ب) = \angle (ب ج) \\ \therefore \angle (ب ج) &= \angle (ب ج) = \angle (ب ج) \end{aligned}$$

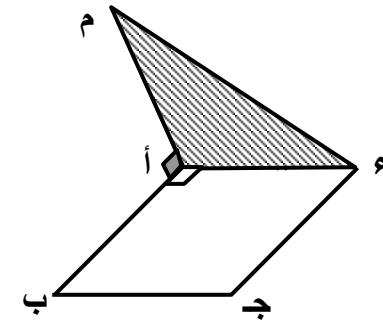
$\triangle$ ب ج ع = $\triangle$ ب ج أ = $\triangle$ ب ج ع متساوي الأضلاع

هـ. في شكل (٦٨) :

أ ب ج ع مربع ، م نقطة لا تنتمي إلى مستوى المربع بحيث $\overline{م أ} \perp \overline{أ ب}$
 (أولاً) هل $\overline{م أ} \perp$ المستوى أ ب ج ع ولماذا ؟

(ثانياً) أثبت أن $\overline{ب أ} \perp$ المستوى م أ ع

(ثالثاً) هل يوجد مستقيم آخر عمودي على المستوى م أ ع ؟ ولماذا ؟



شكل (٦٨)

الحل:

أولاً : لا :

م ليس عمودي على المستوى أ ب ج ع لأن

م ليس عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوى أ ب ج ع

ثانياً : $\overline{ب أ} \perp \overline{أ ع}$ من خواص المربع ، $\overline{ب أ} \perp \overline{أ م}$ معطى

$\therefore \overline{ب أ} \perp$ كل من المستقيمين المتقاطعين $\overline{أ ع}$ ، $\overline{أ م}$

$\therefore \overline{ب أ} \perp$ مستويهما م أ ع

ثالثاً : نعم :

يوجد مستقيم آخر عمودي على المستوى م أ ع وهو المستقيم ج ع
 السبب هو

$\therefore \overline{ج ع} \parallel \overline{ب أ}$ من خواص المربع ، $\overline{ب أ} \perp$ المستوى م أ ع

$\therefore \overline{ج ع} \perp$ المستوى م أ ع

٦. أ ب ج ع أ ب ج ع مكعب طول حرفه يساوي ل أثبت أن :

(أولاً) $\triangle$ أ ع أ ج متساوي الأضلاع . واحسب مساحة سطحه بدلالة ل

(ثانياً) $\overline{أ ب} \perp \overline{ب ج}$ (ثالثاً) $\overline{أ ج} \perp \overline{ع ب}$

(رابعاً) أثبت أن أقطار المكعب متساوية في الطول . وطول كل منها $\sqrt{3}ل$
 (وتستخدم هذه الخاصة في حل التمارين)

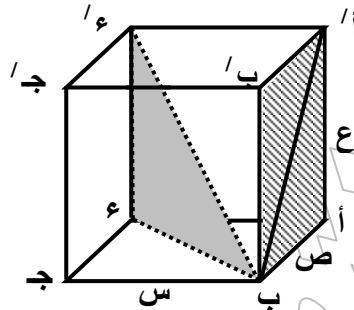
أ ج ١ كل من المستقيمين المتقاطعين ع' ع ، ع ب
 ∴ أ ج ١ مستويهما ع' ع ب ∴ أ ج ١ ع' ع ب

٧. أ ب ج د أ' ب' ج' د' متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة ب ج = س ،
ب أ = ص ، ب ب' = ع

(أولاً) أثبت أن: $\overline{ب ج} \perp \overline{ب أ}$

(ثانياً) أثبت أن أقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول ومربع طول كل منها يساوي $s^2 + v^2 = e^2$

(ثالثاً) إذا كانت $s = 8$ سم ، $v = 6$ سم ، $e = 24$ سم فاحسب طول قطر متوازي المستطيلات . (وتستخدم هذه الخاصية في حل التمارين)



الحل:

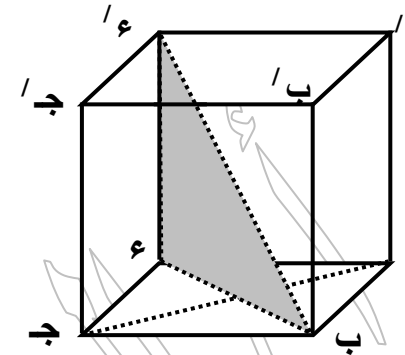
أولاً : ∴ ب ج ⊥ الوجه أ ب ب' أ'
ثانياً : ∴ ب ج ⊥ ب' أ'

ثانياً : في Δ ع ج ب القائم الزاوية في ج

$$(\text{ع ب})^2 = (\text{ع ج})^2 + (\text{ج ب})^2$$

$$(\text{ع ب})^2 = \text{ص} + \text{س}$$

في Δ ϵ' ϵ ب القائمة الزاوية في ϵ

$$\angle(\epsilon' \epsilon) + \angle(\epsilon \epsilon') = \angle(\epsilon' \epsilon)$$


الحل:

أولاً: في Δ أء ج القائم في ء

$$(١) ٢٧ = ٢٧ + ٢٧ = ٢(٧٤) + ٢(٤٦) = ٢(١٢٠)$$

بالمثل في Δ ع' ع' أ' القائم الزاوية في ع

$$(۲)..... \textcircled{۲} = \textcircled{۱} + \textcircled{۳} = \textcircled{۱} (۱/۲) + \textcircled{۳} (۲/۲) = \textcircled{۳} (۱/۲)$$

بالمثل في Δ ϵ' ϵ ج القائمة الزاوية في ϵ

$$(3) \dots\dots\dots \textcircled{2} \cup \textcircled{2} = \textcircled{2} \cup \textcircled{2} = \textcircled{2} (\textcircled{-} \textcircled{2} \textcircled{2}) + \textcircled{2} (\textcircled{2} \textcircled{2}) = \textcircled{2} (\textcircled{-} \textcircled{2} \textcircled{2})$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

$${}^2(\dot{\rightarrow} / \epsilon) = {}^2(\dot{\downarrow} / \epsilon) = {}^2(\dot{\rightarrow} \dot{\downarrow})$$

$$\therefore \text{أ ج} = \text{إ} = \text{ج} / \text{ع} = \text{ج} / \text{ع}$$

∴ Δ ع' أ ج متساوي الأضلاع

ثانياً : ∴ $\overline{AB} \perp$ الوجه ب ب' ج' ج من خواص المكعب

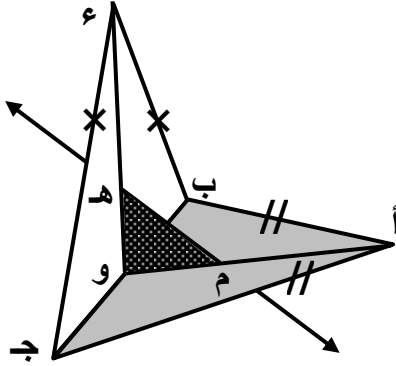
∴ $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

ثالثاً: ∴ $\frac{e}{e'} \perp$ الوجه أ ب ج د
في المربع أ ب ج د قطراه متعامدان

∴ $\overline{EB} \perp \overline{AJ}$ (۵)

من (٤) ، (٥) ينتج أن :

أ ب ج ، ع ب ج مثنان متساويا الساقين مشتركان في القاعدة ب ج وغير واقعين في مستوى واحد ، م ، ه نقطتا تقاطع متوسطاتهما على الترتيب . أثبت أن : ب ج $\perp$ م ه



الحل:

في $\triangle$ أ ب ج المتساوي الساقين
: أو ينصف ب ج عملاً

: أو $\perp$ ب ج (١)

في $\triangle$ ع ب ج المتساوي الساقين
ع و ينصف ب ج

: ع و $\perp$ ب ج (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ب ج $\perp$ كل من المستقيمين المتقاطعين أ و ، ع و

ب ج $\perp$ مستويهما أ و ع

ب ج $\perp$ م ه

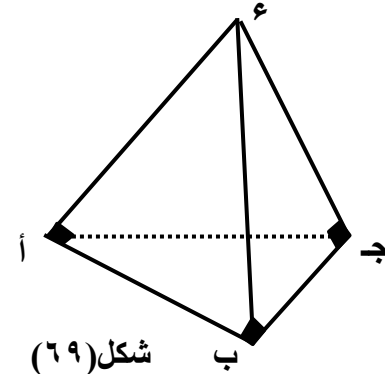
١٠

$\overline{ع} = \overline{ص} + \overline{س}$
 $\overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س} = \overline{ب} \text{ (ع/ب)}$
أي أن $\overline{ر} = \overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س}$ حيث $\overline{ر}$ طول القطر ع/ب
بالمثل يمكن إثبات أن :

مربع طول كل قطر = $\overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س}$
ثالثاً : $\overline{ر} = \overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س} = \overline{ر} = \overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س}$
 $\overline{ر} = \overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س} = \overline{ر}$
: $\overline{ر} = \overline{ع} + \overline{ص} + \overline{س}$

٨. في شكل (٦٩)

ع أ ب ج هرم ثلاثي فيه ب ج $\perp$ ب أ ، ب ج $\perp$ ج ع ، ب أ $\perp$ أ ع
ابحث في الشكل عن قطعة مستقيمة تكون عمودية على أي مستوي فيه مع
ذكر القطعة المستقيمة والمستوى إن وجدا والسبب في ذلك .



شكل (٦٩)

الحل:

لا توجد قطعة مستقيمة عمودية على أي مستوي في الشكل

٩

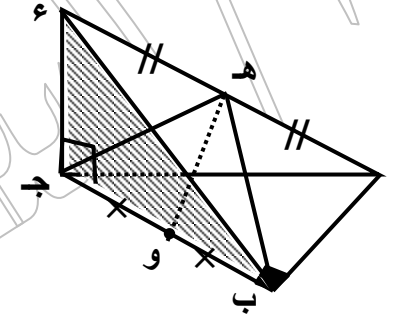
أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب رسم ج د $\perp$ المستوى أ ب ج ، نصفت

أ ع في هـ ، ب ج د في و . أثبت أن :

(أولاً) أ ب $\perp$ المستوى ب ج د

(ثانياً) هـ ب = هـ ج

(ثالثاً) هـ و $\perp$ ب ج



الحل:

أولاً : $\because$ ع د $\perp$ المستوى أ ب ج

$\therefore$ ع د $\perp$ أ ب لكن ب ج $\perp$ أ ب معطى

$\therefore$ أ ب $\perp$ كل من ع د ، ب ج

$\therefore$ أ ب $\perp$ مستويهما ب ج د $\therefore$ أ ب $\perp$ ب د

ثانياً : في $\triangle$ أ ب د القائم الزاوية في ب

$\therefore$ ب هـ متوسط خارج من رأس القائمة ب

$\therefore$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ د (١)

في $\triangle$ أ ج د $\because$ ج د متوسط خارج من رأس القائمة ج

$\therefore$ ج د هـ = $\frac{1}{2}$ أ د (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ب هـ = ج هـ

ثالثاً: في $\triangle$ هـ ب ج المتساوي الساقين

$\therefore$ هـ و ينصف القاعدة ب ج

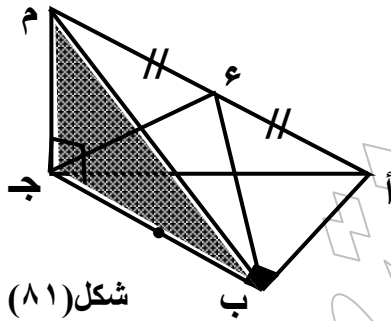
$\therefore$ هـ و $\perp$ ب ج

تمارين (٦)

١. في شكل (٨١) :

المستوى أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، ج د $\perp$ المستوى أ ب ج ، د

منتصف أ م . أثبت أن : ع ب = ع د



شكل (٨١)

الحل:

$\because$ ج د $\perp$ المستوى أ ب ج $\therefore$ م ب مائل مسقطه ج د

$\therefore$ المسقط ج د $\perp$ أ ب معطى

$\therefore$ المائل م ب $\perp$ أ ب نظرية

في $\triangle$ أ ب م القائم الزاوية في ب

$\therefore$ ع ب متوسط خارج من رأس القائمة ب

$\therefore$ ع ب = $\frac{1}{2}$ أ م (١)

في Δ أ ج د القائم الزاوية في ج

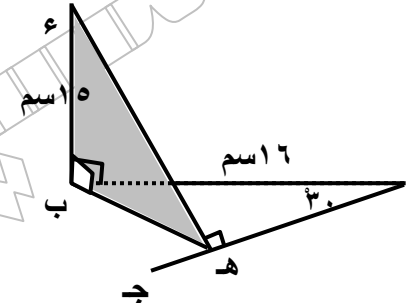
∴ ع ج متوسط خارج من رأس القائمة ج

$$\therefore \text{ع ج} = \frac{1}{2} \text{م أ} \dots\dots\dots (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن : ع ب = ع ج

٢. في شكل (٨٢) :

ق (ب أ ج) = ٣٠° ، أب = ١٦ سم ، ع ب $\perp$ المستوى أ ب ج ، ع ه $\perp$ أ ج فإذا كان ب ع = ١٥ سم احسب ع ه.



شكل (٨٢)

الحل:

ع ب $\perp$ المستوى أ ب ج

ع ه مائل مسقطه ب ه

المائل ع ه $\perp$ أ ج $\supset$ المستوى أ ب ج

المسقط ب ه $\perp$ أ ج

في Δ ب ه أ القائم الزاوية في ه

$$\text{ب ه} = \frac{1}{2} \text{طول الوتر أ ب} = ٨ \text{ سم}$$

في Δ ع ب ه القائم الزاوية في ب

$$\text{ع ه} = \sqrt{\text{ع ب}^2 + \text{ب ه}^2} = \sqrt{٢٢٥ + ٦٤} = ١٧ \text{ سم}$$

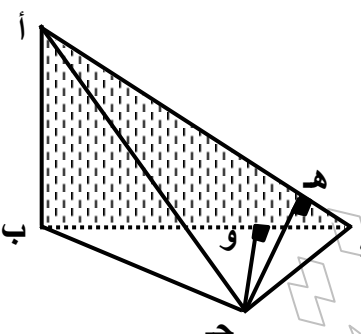
٣. في شكل (٨٣) :

أ ب ج ه هرم ثلاثي فيه أ ب $\perp$ المستوى ب ج د ، رسم ج و $\perp$ ب ع

، ج ه $\perp$ أ ع أثبت أن :

(أولاً) ج و $\perp$ المستوى أ ب ع

(ثانياً) و ه $\perp$ أ ع



شكل (٨٣)

الحل:

أولاً : ∴ أ ب $\perp$ المستوى ب ج د

∴ أ ب $\perp$ ج و

لكن ب ع $\perp$ ج و معطى

ج و $\perp$ كل من أ ب ، ب ع

ج و $\perp$ مستويهما أ ب ع

∴ ج و $\perp$ أ ع (١)

ثانيا : جـ هـ $\perp$ أـ عـ معطى (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

أـ عـ $\perp$ كل من جـ و ، جـ هـ

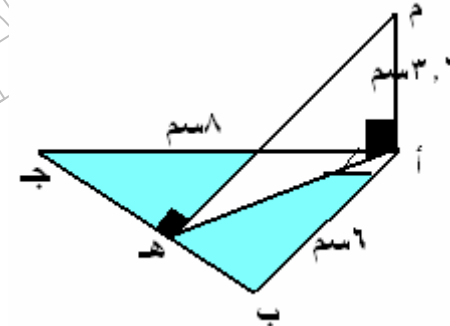
أـ عـ $\perp$ مستويهما جـ هـ و

أـ عـ $\perp$ هـ و

٤. أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ . رسم أ م $\perp$ المستوى أ ب جـ ، كان أ م

= ٣,٦ سم ، رسم م هـ $\perp$ ب جـ ويقطعها في هـ ورسمت أ هـ . فإذا

كان أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٨ سم فاحسب طول كل من أ هـ ، م هـ .



الحل:

م أ $\perp$ المستوى أ ب جـ

م هـ مائل مسقطه أ هـ

المائل م هـ $\perp$ ب جـ $\supset$ المستوى أ ب جـ

المسقط أ هـ $\perp$ ب جـ

في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في أ

$$(ب جـ) = (ب أ) + (أ جـ) = 36 + 64 = 100$$

$$ب جـ = 10 \text{ سم}$$

$$أ هـ \perp ب جـ$$

$$أ هـ = \frac{أ ب \cdot أ جـ}{ب جـ} = \frac{8 \times 6}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

في Δ م أ هـ القائم الزاوية في أ

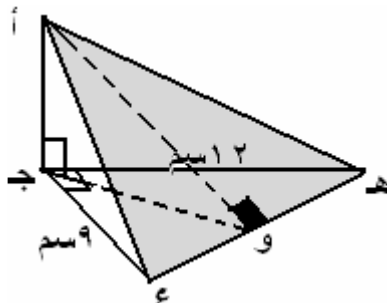
$$(م هـ) = (م أ) + (أ هـ) = (3,6) + (4,8) = 8,4$$

$$م هـ = 8,4 \text{ سم}$$

٥. جـ عـ هـ مثلث قائم الزاوية في جـ . رسم جـ أ $\perp$ المستوى جـ عـ هـ ،

رسمت أ عـ ، أ هـ وكانت مساحة سطح Δ أ هـ عـ = ٩٦ سم^٢ ، جـ عـ =

٩ سم ، جـ هـ = ١٢ سم . احسب طول أ هـ



الحل:

العمل : نرسم أ و $\perp$ عـ هـ ثم نصل جـ و

في Δ جـ عـ هـ القائم في جـ

$$(ع هـ) = (ج ع) + (ع هـ) = 9 + 12 = 21$$

$$ع هـ = 15 \text{ سم}$$

$$\frac{1}{4} ع هـ \times أ و = 96$$

$$م (\Delta أ هـ ع) = 96$$

$$\frac{1}{4} \times 15 \times 12,8 = 48 \quad \text{أو} \quad 12,8 = 12,8 \text{ سم}$$

∴ $\overline{أج} \perp$ المستوى ج ه ∴ $\overline{أو}$ مائل مسقطه ج و

∴ $\overline{أو} \perp \overline{هه}$ ∴ ج و $\perp$ هه

في Δ ج ه ه القائم الزاوية في ج

∴ ج و $\perp$ هه ∴ (ج ه) = ه ه = ه ه

١٢ = ١٥ ه ه ه ه = ٩,٦ سم

في Δ أ و ه القائم الزاوية في و

$$(\text{أ ه})^2 = (\text{أ و})^2 + (\text{و ه})^2 = 12,8^2 + 9,6^2 = 256$$

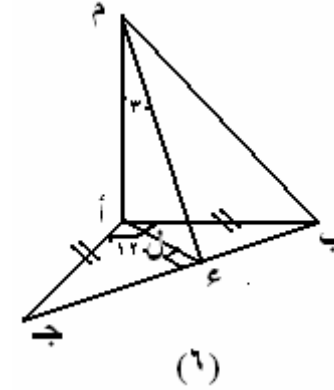
$$\text{أ ه} = 16 \text{ سم}$$

٦. أ ب ج مثلث فيه أ ب = أ ج ، ق (ب أ ج) = ١٢٠° ، رسم

أ ع $\perp$ ب ج ويقطعها في ع وكان أ ع = ل ، ورسم أ م $\perp$ المستوى

أ ب ج فإذا كان ق (أ م ب) = ٣٠° فاحسب بدلالة ل كل من أ م ، م ع

، مساحة سطح Δ م ب ج .



الحل:

في Δ أ ب ج المتساوي الساقين

∴ أ ب = أ ج ∴ ق (ب) = ق (ج) = ٣٠°

أ ع مقابل للزاوية ٣٠°

$$\therefore \text{أ ع} = \frac{1}{4} \text{أ ب} \iff \text{أ ب} = 4 \text{أ ع}$$

في المثلث أ ب ع ب ع = $\sqrt{3}$ ل من نظرية فيثاغورث

$$\text{ب ج} = \sqrt{3} \text{أ ع}$$

في Δ أ م ب القائم في أ

$$\therefore \text{ق (م)} = 30^\circ \therefore \text{أ ب} = \frac{1}{4} \text{م ب}$$

$$\therefore \text{م ب} = 4 \text{أ ب}$$

في Δ أ ب م أ م = $\sqrt{3}$ ل من نظرية فيثاغورث

في Δ م أ ع القائم في أ

$$(\text{م ع})^2 = (\text{م أ})^2 + (\text{أ ع})^2 = 3 \text{ل}^2 + \left(\frac{\text{م ب}}{4}\right)^2$$

$$\text{م ع} = \sqrt{3} \text{ل}$$

∴ م أ $\perp$ المستوى أ ب ج ∴ م ع مائل مسقطه أ ع

∴ أ ع $\perp$ ب ج ∴ م ع $\perp$ ب ج

$$\text{م} (\Delta \text{ م ب ج}) = \frac{1}{4} \text{ب ج} \times \text{م ع} = \frac{1}{4} \times 4 \text{أ ب} \times \sqrt{3} \text{ل} = \sqrt{3} \text{أ ب ل}$$

٧. س ، ص مستويان غير متوازيين شكل (٨٤) ، أ ب ج مثلث قائم الزاوية

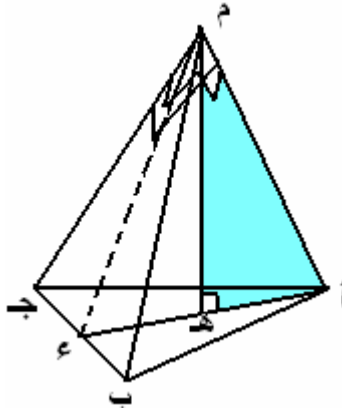
في أ مرسوم في المستوى س ، أ' ، ب' ، ج' هي مساقط رؤوسه على

المستوى ص على الترتيب ، فإذا كان أ ب // المستوى ص فأثبت ان :

المثلث أ' ب' ج' قائم الزاوية في أ' .

، م هـ $\perp$ المستوى أ ب ج ويقطعه في هـ وكان أ هـ يقطع ب ج في نقطة ع فأثبت أن :

(أولاً) م أ $\perp$ المستوى م ب ج (ثانياً) م ع $\perp$ ب ج
(ثالثاً) (م هـ) $\perp$ أ هـ . هـ ع



الحل:

أولاً : $\therefore$ م أ $\perp$ كل من م ب ، م ج معطى

$\therefore$ م أ $\perp$ المستوى م ب ج

$\therefore$ م أ $\perp$ ب ج (١)

ثانياً : $\therefore$ م هـ $\perp$ المستوى أ ب ج

م هـ $\perp$ ب ج (٢)

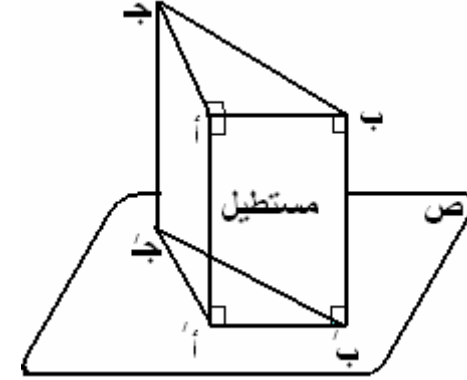
من (١) ، (٢) ينتج أن ب ج $\perp$ كل من م أ ، م هـ

$\therefore$ ب ج $\perp$ مستويهما م أ ع

$\therefore$ ب ج $\perp$ م ع

ثالثاً : في Δ م ع هـ القائم الزاوية في م

م هـ $\perp$ أ ع



الحل:

$\therefore$ ب ب' $\perp$ ، أ أ' عمودان على المستوى ص

$\therefore$ ب ب' $\parallel$ أ أ' (١)

$\therefore$ أ ب' $\parallel$ المستوى ص ، والمستوى أ ب ب' يحوي أ ب ويقطع
المستوى ص في أ' / ب

$\therefore$ أ ب' $\parallel$ أ' ب' (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ ب' $\parallel$ متوازي أضلاع فيه أ أ' $\perp$ أ' ب
 $\therefore$ أ ب' $\perp$ أ' ب' مستطيل

وحيث أن أ ب' $\perp$ أ ج معطى

$\therefore$ أ ب' $\perp$ كل من أ أ' ، أ ج

$\therefore$ أ ب' $\parallel$ أ' ب' إثباتاً

$\therefore$ أ' ب' $\perp$ أ' ج' Δ أ ب' ج' قائم الزاوية في أ'

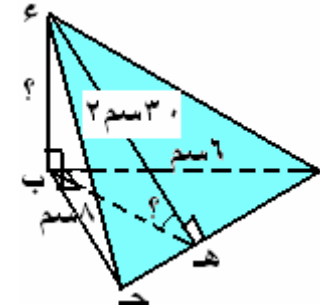
٨. م أ ب ج هرم ثلاثي ، م أ ، م ب ، م ج متعامدة متني متني

∴ (م ه) = ٢ أ ه . ه ع

٩. أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، رسمت ب ع عمودية على المستوى أ ب ج ثم رسمت ع ه عمودية على أ ج حيث ه و أ ج . فإذا كانت مساحة المثلث أ ج ع تساوي ٣٠ سم^٢ ، أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم . فأوجد :

أولا : طول ب ع

ثانيا : ظل زاوية ميل ع ه على المستوى أ ب ج



الحل:

في Δ أ ب ج القائم الزاوية في ب
(أ ج) = (أ ب) + (ب ج)

$$100 = 64 + 36 = \therefore \text{ب ع} \perp \text{المستوى أ ب ج} \quad \Leftarrow \quad \therefore \text{ع ه مائل مسقطه ب ه}$$

$$\therefore \text{ع ه} \perp \text{أ ج} \quad \therefore \text{ب ه} \perp \text{أ ج}$$

في Δ أ ب ج القائم الزاوية في ب
ب ه ⊥ أ ج

$$\text{ب ه} = \frac{\text{ب أ} \times \text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \frac{8 \times 6}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

$$\text{م} (\Delta \text{ ع أ ج}) = 30$$

$$\frac{1}{2} \text{أ ج} \times \text{ع ه} = 30$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \text{ع ه} = 30 \quad \text{ع ه} = 6 \text{ سم}$$

في Δ ع ه ب القائم الزاوية في ب

$$(\text{ع ه ب}) = (\text{ع ه}) - (\text{ه ب})$$

$$= (6) - (4,8) = 1,2 \quad \Leftarrow \quad \text{ب ع} = 3,6 \text{ سم}$$

$$\text{ثانيا : ظا} (\text{ع ه ب}) = \frac{\text{ب ع}}{\text{ه ب}} = \frac{3,6}{4,8} = \frac{3}{4}$$

ظل زاوية ميل ع ه على المستور أ ب ج يساوي $\frac{3}{4}$

١٠. م أ ب ج هرم ثلاثي منتظم طول حرفه ٦ سم . أوجد :

أولا : الارتفاع الجانبي للهرم

ثانيا : ارتفاع الهرم

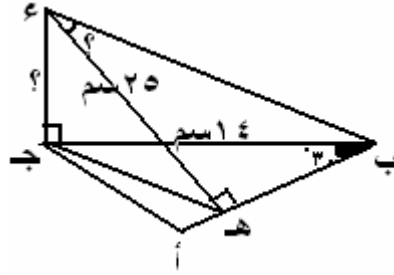
ثالثا : قياس زاوية ميل الحرف م أ على مستوى القاعدة أ ب ج

$$\widehat{ق(م أن)} = ٤٤^\circ - ٥٤^\circ$$

١١. أ ب ج مثلث فيه ق (ب) = ٣٠° ، ب ج = ١ سم ، رسم ج ع عموديا على المستوى أ ب ج ثم رسم ع ه $\perp$ أ ب فقطعها في النقطة ه فإذا كان ع ه = ٢ سم فأوجد :

أولا : طول ج ع

ثانيا : ظل زاوية ميل ب ع على المستوى ج ع ه



الحل:

ج ع $\perp$ المستوى أ ب ج ع ه مائل مسقطه ج ه

ع ه $\perp$ أ ب معطى

ج ه $\perp$ أ ب

في Δ ب ه ج القائم الزاوية في ه

ج ه مقابل للزاوية $٣٠^\circ \Leftrightarrow$ ج ه = $\frac{1}{2}$ ب ج = $\frac{1}{2}$ سم

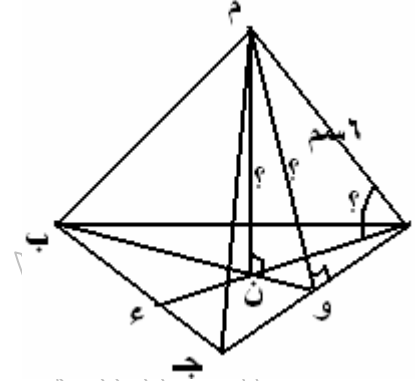
ب ه = $\sqrt{3}$ سم

في Δ ع ج ه القائم الزاوية في ج

$$٢٤ = (٢٥) - (٧) = (٢٤)$$

$$٥٧٦ = (٧) - (٢٥) =$$

$$ع ج = ٢٤ سم$$



الحل:

أولا : في Δ أ م ج المتساوي الأضلاع $\therefore$ م و $\perp$ أ ج

$\therefore$ أ و = ب و = ٦ سم

في Δ أ و م القائم الزاوية في و

$$(م و) = (م أ) - (أ و) = ٢٧ - ٩ = ١٨$$

م و = $\sqrt{3}$ $\therefore$ الارتفاع الجانبي للهرم = $\sqrt{3}$

بالمثل ب و = $\sqrt{3}$

ن ملتقى متوسطات Δ أ ب ج

$$ن و = ب و \times \frac{1}{3} = \sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ثانيا : في Δ م ن و القائم الزاوية في ن

$$(م ن) = (م و) - (ن و) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$م ن = \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{ثالثا : أن} = \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

زاوية ميل م أ على مستوى القاعدة أ ب ج هي $\widehat{م أن}$

$$\text{جتا} (\widehat{م أن}) = \frac{ن أ}{م أ} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$\Delta \Delta$ أس ع ، أص ع

$$\left. \begin{array}{l} \text{أع ضلع مشترك} \\ \text{فيهما} \left\{ \begin{array}{l} \text{ق} \left(\begin{array}{l} \text{س} \text{ أ} \text{ ع} \end{array} \right) = \text{ق} \left(\begin{array}{l} \text{ص} \text{ أ} \text{ ع} \end{array} \right) \text{ معطى} \\ \text{ق} \left(\begin{array}{l} \text{س} \text{ أ} \end{array} \right) = \text{ق} \left(\begin{array}{l} \text{ص} \text{ أ} \end{array} \right) = 90^\circ \end{array} \right\}$$

$\therefore \Delta \Delta$ أس ع $\equiv$ Δ أص ع وينتج أن

ع س = ع ص ، أس = أص

وحيث أن أب = أج

ثانياً : $\frac{\text{أس}}{\text{أب}} = \frac{\text{أص}}{\text{أج}} \Leftrightarrow \text{س ص} \parallel \text{ب ج}$

ب ه $\perp$ كل من ع ه ، ج ه

ب ه $\perp$ مستويهما ع ج ه ، ب ع مائل مسقطه ه ع

زاوية ميل ب ع على المستوى ج ه ه هي ب ع ه

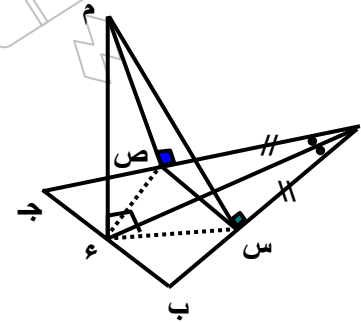
$$\text{ظا (ب ع ه)} = \frac{\text{ب ه}}{\text{ه ع}} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

١٢. أب ج مثلث فيه أب = أج ، أع ينصف أ ويقطع ب ج في ع

رسمت ع م عمودية على المستوى أب ج ثم رسم م س $\perp$ أب

قطعها في س ، م ص $\perp$ أج قطعها في ص اثبت أن :

(أولاً) ع س = ع ص (ثانياً) س ص $\parallel$ ب ج



الحل:

في Δ أب ج المتساوي الساقين

$\therefore$ أع ينصف أ $\therefore$ أع $\perp$ ب ج وينصفها

$\therefore$ م ع $\perp$ المستوى أب ج $\therefore$ م س مائل مسقطه ع س

$\therefore$ م س $\perp$ أب معطى $\therefore$ ع س $\perp$ أب

بالمثل ع ص $\perp$ أج

تمارين (٧)

١. م أب ج هرم ثلاثي فيه م أ $\perp$ المستوى أب ج ، أب = أج = ١٣ سم

، ب ج = ١٠ سم ، م أ = ٥ سم ، ع منتصف ب ج

(أ) احسب طول أع واثبت أن م ع $\perp$ ب ج

(ب) احسب طول م ع وأوجد زاوية مستوية للزاوية الزوجية

(م - ب ج - أ) وإذا فرضنا أن قياسها ه فاحسب جتا ه

(ج) اثبت أن المستويين م أ ع ، م ب ج متعامدان

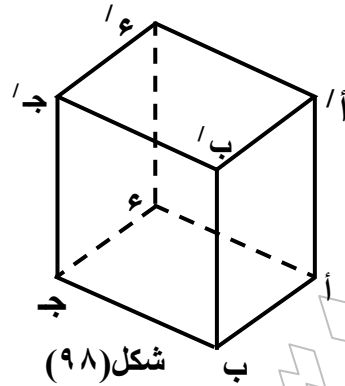
٢. في الشكل (٩٨) : أ ب ج د أ' ب' ج' د' مكعب

(أ) اذكر احدى الزوايا الزوجية القائمة مستخدما رؤس المكعب مع ذكر احدى زواياها المستوية

(ب) اذكر ثلاثة أزواج من المستويات المتعامدة

(ج) هل المستوى أ ج د' ⊥ المستوى أ ب ج د ؟ ولماذا؟

اثبت أن ق (ب - ج د - أ' - أ) = ق (ب - أ' - أ - ج)



شكل (٩٨)

الحل:

(أ) احدى الزوايا الزوجية القائمة هي (ب - أ' - أ - ج) وزاويتها المستوية

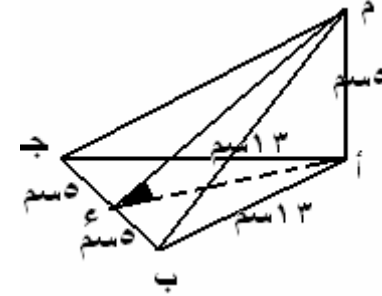
هي ب' أ' ع

(ب) ثلاثة أزواج من المستويات المتعامدة أ ب' أ' ، ع أ' أ' ع' &

أ ب' أ' ، ج ب' ج' & أ ب' أ' ، أ ب ج د

(ج) نعم : المستوى أ ج د' ⊥ المستوى أ ب ج د لأن أ' أ' ⊥ المستوى

أ ب ج د ، المستوى أ ج د' أ' يحوي أ' أ'



الحل:

(أ) في Δ أ ب ج المتساوي الساقين

∴ ع منتصف ب ج ∴ أ ع ⊥ ب ج

$$(أ ع)^2 = (أ ب)^2 - (ب ع)^2$$

$$= 169 - 25 = 144$$

$$أ ع = 12 \text{ سم}$$

∴ م أ ⊥ المستوى أ ب ج ∴ م ع مائل مسقطه أ ع

∴ أ ع ⊥ ب ج ∴ المستوى أ ب ج

∴ المائل م ع ⊥ ب ج

(ب) في Δ م أ ع القائم الزاوية في أ

$$(م ع)^2 = 169 = 144 + 25 \iff م ع = 13 \text{ سم}$$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية م - ب ج - أ هي أ ع م

$$\hat{ج ت ه} = \frac{12}{13}$$

(ج) ∴ ب ج ⊥ كل من م ع ، أ ع

∴ ب ج ⊥ المستوى م أ ع

∴ ب ج ∴ المستوى م ب ج

∴ المستويان م أ ع ، م ب ج متعامدان

ع أ ب ، ع أ ج ، (ب أ ج) قائمة

١. المستويان ع أ ب ، ع أ ج متعامدان (١)

٢. ع أ عمودي على كل من أ ب ، أ ج $\Leftrightarrow$ ع $\perp$ مستويهما أ ب ج

وحيث أن كل من المستويين ع أ ب ، ع أ ج يحوي ع

٢. كل من المستويين ع أ ب ، ع أ ج عمودي على المستوى أ ب ج (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ع أ ب ، ع أ ج مستويان متعامدان وكل منهما $\perp$ المستوى أ ب ج

(ب) ق (ج - أ ب) = ق (ج أ ب) = 90°

(ج) ب أ ع هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب - أ ج - ع) ،

ج أ ع هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ج - أ ب - ع) وحيث أن

ق (ب أ ع) = ق (ج أ ب) = 90°

٢. ق (ب - أ ج - ع) = ق (ج - أ ب - ع)

(٤) Δ أ ب ج قائم الزاوية في أ ومتساوي الساقين

٢. ق (أ ج ب) = 45° بالمثل ق (ع ج أ) = 45°

٢. ق (أ ج ب) + ق (ع ج أ) = $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

المثلثات ب أ ج ، ب أ ع ، ع أ ج متطابقة بضلعين وزاوية محصورة

٢. من التطابق ينتج أن ع ب = ب ج = ج ع

٢. Δ ع ب ج متساوي الأضلاع ٢. ق (ع ج ب) = 60°

٤. ضع علامة (✓) أمام الجملة الصحيحة وعلامة (x) أمام الجملة الخاطئة فيما يلي :

(أ) يتوازي المستقيمان إذا كان كل منهما عموديا على نفس المستوى .

(٤) ب ج أ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب - ج - أ) (١)

ب أ ج هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب - أ - ج) وحيث أن

ق (ب ج أ) = ق (ب أ ج) = 45° من خواص المربع أ ب ج ع

٢. ق (ب - ج - أ) = ق (ب - أ - ج) = 45°

٣. في الشكل (٩٩) :

أ ، ب ، ج ، ع أربع نقاط لا تنتمي لمستوى واحد وحيث أ ب ، أ ج ، أ ع

متعامدة مثنى مثنى ومتساوية في الطول

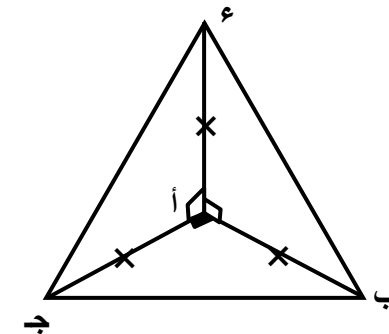
(أ) اذكر مستويين متعامدين يكون كل منهما عموديا على المستوى أ ب ج

مع ذكر سبب التعامد

(ب) أوجد ق (ج - أ ب - ع)

(ج) بين أن ق (ب - أ ج - ع) = ق (ج - أ ب - ع)

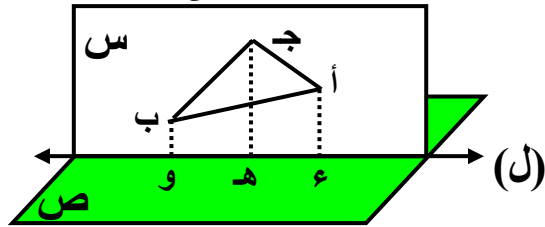
(٤) أوجد ق (أ ج ب) + ق (ع ج أ) ، ق (ع ج ب)



الحل:

(أ) ب أ ج هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

اوجد المسقط العمودي للمثلث أ ب ج على المستوى ص



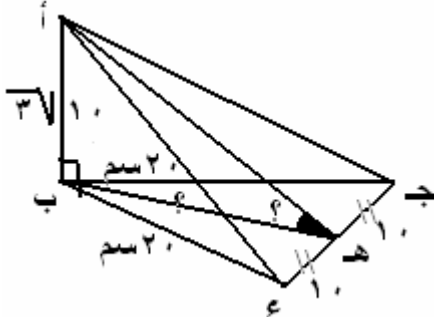
شكل (١٠٠)

الحل:

المسقط العمودي للمثلث أ ب ج على المستوى ص هو $\overline{هـ و}$ حيث $\overline{هـ و}$ مسقط
أ على ص ، و هي مسقط ب على ص ، $\overline{هـ و} \subset$ المستقيم ل

٧. أ ب ج د هـ م ثلاثي فية أ ب ١ المستوى ب ج د ، هـ منتصف ج د

فإذا كان : أ ب = $\sqrt[3]{10}$ سم ، ب ج د مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٢٠ سم فاحسب ب هـ ثم اوجد ق (أ - ج - هـ - ب)



الحل:

في Δ ب ج ء المتساوي الأضلاع

∴ هـ منتصف جـ ∴ بـ هـ 1 جـ

$$b = 5 = 2.5 \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2.0 = \sqrt{3} \times 1.0 = \sqrt{3} \text{ سم}$$

∴ $\overline{AB} \perp$ المستوى ب ج ء ∴ $\overline{b} \perp$ مسقط المائل $\overline{a}$ ه عليه

(ب) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطة معلومة ويكون عموديا على مستقيم معلوم .

(ج) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطة معلومة ويكون عموديا على مستو معلوم.

(د) إذا كان المستقيم (ل) عموديا على المستوى (س) فإنه يوجد مستوى واحد وواحد فقط يحتوى المستقيم (ل) ويكون عموديا على المستوى س .

(هـ) إذا كان كل من المستويين S ، V عموديان على مستوى ثالث E فإن خطي تقاطعهما مع المستوى E يكونان متوازيين .

الحل:

$\times (\text{هـ})$ $\times (\text{ع})$ $\sqrt{(\text{ج})}$ $\sqrt{(\text{ب})}$ $\sqrt{(\text{أ})}$

٥. في بعض العبارات التالية اعطينا وصفا لمجموعة من المستقيمات وفي البعض الاخر اعطينا وصفا لمجموعة من المستويات – فاذكر في اي من العبارات تكون المجموعة المعطاة متوازية فيما بينها .

(أ) مجموعة المستقيمات العمودية على مستوى معلوم

(ب) مجموعة المستقيمات الموازية لمستوى معلوم

(ج) مجموعة المستويات الموازية لمستوى معلوم

(د) مجموعة المستويات العمودية على مستوى معلوم

(٥) مجموعة المستويات العمودية على مستقيم معلوم

(و) مجموعة المستويات الموازية لمستقيم معلوم

الحل:

(أ) متوازية

(ب) غير متوازية

(ج) متوازية

(٤) غير متوازية

(هـ) متوازیه

(و) غير متوازية

٦. في الشكل (١٠) : أ ب ج مثلث مرسوم في المستوى س ، والمستويان

س ، ص متعامدان ومتقاطعان في المستقيم ل

∴ ب هـ ⊥ جـ ع إثباتاً ∴ أ هـ ⊥ جـ ع

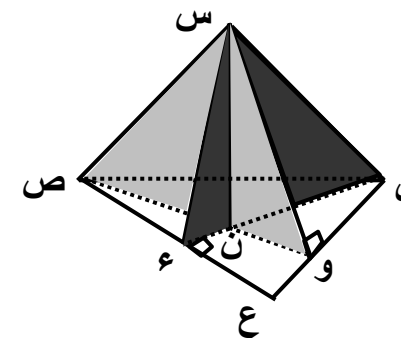
∴ أ هـ ب هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (أ - جـ ع - ب)

$$\text{ظا (أ هـ ب)} = \frac{\text{أ ب}}{\text{هـ ب}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} = 1$$

∴ ق (أ هـ ب) = ٤٥° ∴ ق (أ - جـ ع - ب) = ٤٥°

٨. س ص ع ل هرم ثلاثي في س ل ⊥ ص ع ، س ص ⊥ ع ل
(أولاً) اثبت أنه يوجد مستوى يحتوي س ل ويكون عمودياً على ص ع
ومستوى آخر يحتوي س ص ويكون عمودياً على ع ل .

(ثانياً) إذا تقاطع هذان المستويان في س س' فاثبت أن س س' يمر
بنقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ص ع ل وأن س س' ⊥ المستوى
ص ع ل



الحل:

العمل : نرسم ل ع ⊥ ص ع ، ص و ⊥ ع ل
∴ ص ع ⊥ س ل معطى ، ص ع ⊥ ل ع عملاً

∴ ص ع ⊥ كل من س ل ، ل ع

∴ ص ع ⊥ مستويهما س ل ع

∴ المستوى الذي يحتوي س ل ويكون عمودياً على ص ع هو س ل ع
بالمثل المستوى الذي يحتوي س ص ويكون عمودي على ع ل هو
س ص و

ثانياً : نفرض أن ل ع ∩ ص و = { ن }

∴ خط تقاطع المستويين س ل ع ، س ص و هو س ن

بفرض أن س س' هو خط تقاطع المستويين س ل ع ، س ص و
س س' = س ن

∴ س س' يمر نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ص ع ل وهي نقطة ن

∴ ص ع ⊥ المستوى س ل ع ، المستوى ل ص ع يحتوي ص ع

∴ المستويان س ل ع ، ل ص ع متعامدان (١)

بالمثل المستويان س و ص ، ل ص ع متعامدان (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

∴ كل من المستويين س ل ع ، س ص و عمودي على المستوى ص ع ل

∴ خط تقاطع المستويين وهو س س' ⊥ المستوى ص ع ل

٩. أ ب جـ ع أ' ب' ج' ع' متوازي مستطيلات فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جـ =

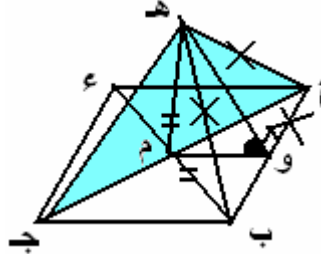
٢٠ سم ، ب ب' = ١٥ سم

أولاً : اثبت أن الشكل أ ب جـ ع' مستطيل واحسب مساحة سطحه

ثانياً : احسب قياس الزاوية بين المستوي أ ب جـ ع' والمستوى أ ب جـ ع

١٠. أ ب ج د مربع ، م نقطة تقاطع قطراه ، ه نقطة لا تنتمي لمستوى المربع بحيث كان ه م = م ب وكان المثلث ه أ ب متساوي الأضلاع
أولا : اثبت أن ه م $\perp$ م ب

ثانيا : برهن على أن المستوى م أ ج عمودي على مستوى المربع أ ب ج د
ثالثا : أوجد قياس الزاوية الزوجية بن المستويين أ ب ه ، أ ب ج



الحل:

في الشكل : م ب = م ه = م أ ، أ ب = ب ه = ه أ
 $\Delta \Delta$ ه م ب ، أ م ب

فيهما $\left. \begin{array}{l} \text{م ب ضلع مشترك} \\ \text{م ه = م أ} \\ \text{ه ب = أ ب} \end{array} \right\}$

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن : ق (ه م ب) = ق (أ م ب) = 90°
لأن قطرا المربع متعامدان وينصف كل منهما الآخر

∴ ه م $\perp$ م ب (١)

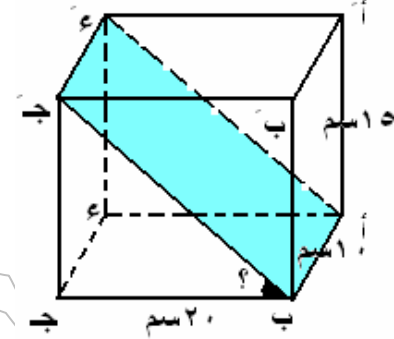
ثانياً : بالمثل $\Delta \Delta$ ه م ب ، ه م أ متطابقان ومن التطابق ينتج أن :
ق (ه م ب) = ق (ه م أ) = 90°

∴ ه م $\perp$ م أ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ه م $\perp$ المستوى أ ب ج د وحيث أن المستوى ه أ ج يحوي ه م

∴ المستوى ه أ ج $\perp$ مستوى المربع أ ب ج د



الحل:

∴ أ ب // ع ج' ويساويه في الطول من خواص متوازي المستطيلات

∴ أ ب ج د' ع' متوازي أضلاع (١)

∴ أ ب $\perp$ المستوى ب ج ج' ب'

∴ أ ب $\perp$ ب ج ج' $\supset$ المستوى ب ج ج' ب' (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

أ ب ج د' ع' متوازي أضلاع فيه أ ب ج' قائمة ∴ أ ب ج د' ع' مستطيل

في Δ ب ج ج' القائم الزاوية في ج

$$(\text{ب ج}')^2 = (\text{ب ج})^2 + (\text{ج ج}')^2$$

$$20^2 = 10^2 + (\text{ج ج}')^2 \Rightarrow 400 = 100 + (\text{ج ج}')^2 \Rightarrow (\text{ج ج}')^2 = 300 \Rightarrow \text{ج ج}' = 10\sqrt{3}$$

$$\text{مساحة المستطيل أ ب ج د' ع' = أ ب} \times \text{ب ج ج}' = 10 \times 10\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ سم}^2$$

ثانياً : الزاوية ج ب ج' هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين

المستويين أ ب ج ج' ع' ، أ ب ج د

$$\text{جنا ج ب ج}' = \frac{20}{10} = 2$$

$$\text{ق (ج ب ج}') = 52^\circ$$

ثالثاً : نفرض أن و منتصف أ ب

في Δ هـ أ ب المتساوي الأضلاع

∴ و منتصف أب ∴ هو ⊥ أب

بالمثل م و $\perp$ أ ب .: هؤم هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية
بين المستويين أ ب هـ ، أ ب جـ

ظا هؤم = $\frac{\text{هم}}{\text{وم}}$ = $\frac{\text{ب م}}{\text{ب ج}}$ = $\frac{2}{2\sqrt{}}$ = $\sqrt{}$ ق (هؤم) = ٤٤ = ٥٤

١١. م أ ب ج هـ م ثلاثي رأسه م ، قاعدته المثلث المتساوي الأضلاع أ ب

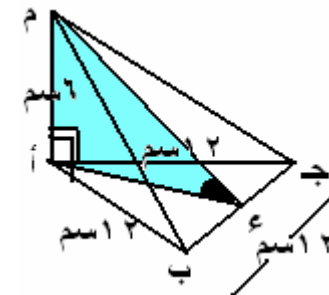
جـ الذي طول ضلعه ٢١ سم ، $\hat{C} = \hat{A}$ ، $\hat{B} = 90^\circ$ ،

م أ = اسم ، ء منتصف ب ج

أولاً : اثبت أن $\overline{B} \perp$ المستوى م أ ع

ثانيا : أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب ج ، أ ب ج

ثالثا : اثبت أن المستويين م أ ع ، م ب ج متعامدان



الحل:

أولاً: في Δ أ ب ج المتساوي الأضلاع

∴ $\overline{e}$ منتصف $\overline{b}$ ج ∴ $\overline{a} \perp \overline{b}$ ج

$$أ ب ج = ٦٠ = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} = \sqrt[3]{6} \text{ سم}$$

∴ $\overline{A} \perp$ كل من $\overline{A} \text{ ب}$ ، $\overline{A} \text{ ج}$ ∴ $\overline{A} \perp$ المستوى $\overline{A} \text{ ب ج}$

∴ $\overline{EA}$ مسقط المائل $\overline{EM}$ على المستوى ، ∴ $\overline{EA} \perp \overline{B}$ ب ج إثباتاً

نظرية $\therefore \overline{م} \perp \overline{ب ج}$

ثانياً : $\overline{ب ج} \perp \overline{كل من ع م} ، \overline{ع أ} \Leftrightarrow \therefore \overline{ب ج} \perp \overline{مستويهما م أ ع}$

أء م هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ب ج ، أ ب ج

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{٦}} = \frac{\sqrt[٦]{٦}}{\sqrt[٣]{٦}} = \frac{\sqrt[٦]{٦}^٢}{\sqrt[٦]{٦}^٢} = \frac{\sqrt[٦]{٦}^٢}{١} = \sqrt[٦]{٦}^٢$$

ثالثاً: ∴ ب ج ⊥ المستوى م أ ع والمستوى م ب ج يحتوى ب ج

∴ المستويان م ب ج ، م أ ع متعامدان

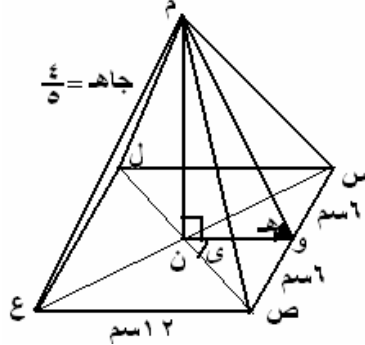
١٢. م أب ج هرم ثلاثي فيه أب = أج ، م ب = م ج ، د منتصف

ب ج اثبت أن ب ج $\perp$ المستوى م أ ع ، وإذا م ه رسم $\perp$ أ ع

فأثبت أن $\overrightarrow{MH} \perp$ المستوى أ ب ج وإذا كان $M = \sqrt{2}$ سم ، $M = D =$

٤. سم. فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب ج ، أ ب ج

ثالثاً : أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ن و ، م ن ص



الحل:

أولاً : من خواص Δ م س ص المتساوي الساقين

∴ و منتصف س ص ∴ م و $\perp$ س ص

بالمثل في Δ ن س ص المتساوي الساقين ن و $\perp$ س ص
في Δ س ص ع

ن و $\frac{1}{2}$ ع ص = سم لماذا ؟

في Δ م و ن ظام و ن $\frac{م}{ن} = \frac{4}{3}$

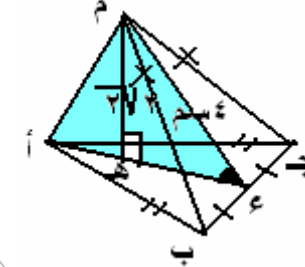
ثانياً : م ن = $\frac{24}{3} = 8$ سم $\angle(م و) = \angle(م ن) + \angle(ن و)$

$10 = م و \Leftarrow 10 = \angle(8) + \angle(2) =$

مساحة الوجه م س ص = $\frac{1}{2} \times م \times ص = 10 \times 12 \times \frac{1}{2} = 60$ سم²

ثالثاً : الزاوية ون ص هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ن و ، م ن ص

ظاى $\frac{و}{ن} = \frac{6}{1} = 6 \Leftarrow ق(و ن ص) = 45^\circ$



الحل:

في Δ أ ب ج المتساوي الساقين

∴ ع منتصف ب ج ∴ أ ع $\perp$ ب ج (١)

بالمثل في Δ م ب ج م ب ج

من (١) ، (٢) ينتج أن

ب ج $\perp$ كل من م ع ، أ ع ∴ ب ج $\perp$ مستويهما م أ ع

∴ ب ج $\perp$ م ه ∴ المستوي م أ ع (٣)

وحيث أن م ه $\perp$ أ ع معطى (٤)

∴ م ه $\perp$ كل من ب ج ، أ ع ∴ م ه $\perp$ مستويهما أ ب ج

م ه هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ب ج ، أ ب ج

جا (م ه) = $\frac{م}{م ع} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \therefore ق(م ه) = 45^\circ$

١٣. م س ص ع ل هرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته ١٢ سم ،

ق (م- س ص - ل) = ه حيث جا ه = $\frac{4}{5}$ ، نقطة (و) منتصف

س ص ، س ع $\cap$ ص ل = { ن }

أولاً : احسب ارتفاع الهرم م س ص ع ل

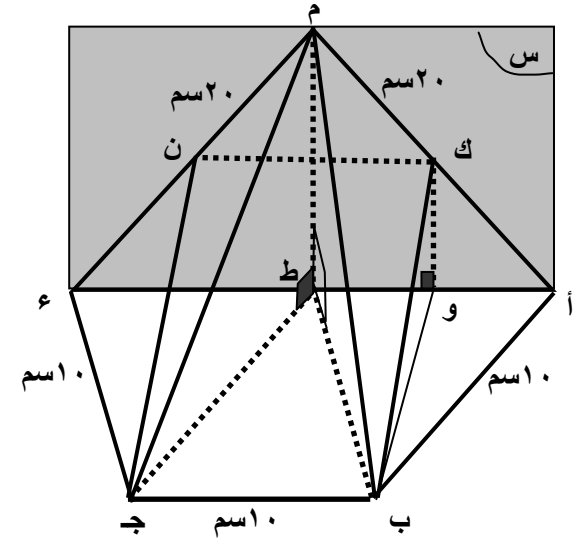
ثانياً : أوجد مساحة الوجه الجانبي م س ص

نماذج اختبارات كتاب المدرسة (١)

الهندسة الفراغية

(٢) المعطيات : $\overline{أ ب ج د}$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{أ ع} // \overline{ب د}$ ، $\overline{أ ع} = ٢٠$ سم ، $\overline{أ ب} = \overline{ب ج} = \overline{ج د} = \overline{د أ} = ١٠$ سم ، $\overline{س}$ مستوى $\perp$ المستوى $\overline{أ ب ج د}$ مار بالضلع $\overline{أ ع}$ ، رسم المثلث المتساوي الأضلاع $\overline{م أ ع}$ في المستوى $\overline{س}$ المطلوب : (١) اثبت أن : $\overline{م أ} = \overline{م ب} = \overline{م ج} = \overline{م د} = ٢٠$ سم
(٢) إذا كان $\overline{ك}$ ، $\overline{ن}$ منتصف $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ع}$ فاثبت أن الشكل $\overline{ب ك ن ج}$ مستطيل ، واحسب طول قطره ومساحة سطحه .

العمل : نرسم $\overline{م ط} \perp \overline{أ ع}$



البرهان : (أولاً) المستويان $\overline{س}$ ، $\overline{أ ب ج د}$ متعامدان $\overline{م ط} \perp \overline{س}$ المستوى $\overline{س}$ حيث أن $\overline{م ط} \perp$ خط التقاطع $\overline{أ ع} \iff \overline{م ط} \perp$ المستوى $\overline{أ ب ج د}$
 $\overline{م ط} \perp$ كل من $\overline{ط أ}$ ، $\overline{ط ب}$ ، $\overline{ط ج}$ ، $\overline{ط د}$

من تطابق المثلثات $\overline{م ط أ}$ ، $\overline{م ط ب}$ ، $\overline{م ط ج}$ ، $\overline{م ط د}$ ينتج أن
 $\overline{م أ} = \overline{م ب} = \overline{م ج} = \overline{م د} = ٢٠$ سم
(ثانياً) في المثلث $\overline{م أ ع}$

$\overline{ك ن}$ قطعة مستقيمة واصله بين منتصف $\overline{أ ع}$ ، $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ع}$
 $\overline{ك ن} // \overline{أ ع}$ ، $\overline{ك ن} = \frac{١}{٢} \overline{أ ع}$

وحيث أن $\overline{ب ج د} // \overline{أ ع}$ ، $\overline{ب ج د} = \frac{١}{٢} \overline{أ ع}$

$\overline{ك ن} // \overline{ب ج د}$ ويساوية في الطول

الشكل $\overline{ب ك ن ج د}$ متوازي أضلاع (١)

نرسم $\overline{ك و} \perp \overline{أ ع} \iff \overline{ك و} \perp$ المستوى $\overline{أ ب ج د}$ لماذا؟

في المثلث $\overline{م أ ط}$ $\overline{ك و}$ شعاع مرسوم من منتصف الضلع $\overline{م أ}$ موازياً $\overline{م ط}$

$\overline{ك و}$ ينصف $\overline{أ ط}$

في المثلث $\overline{أ ب ط}$ المتساوي الأضلاع

$\overline{ب و}$ ينصف القاعدة $\overline{أ ط} \iff \overline{ب و} \perp \overline{أ ط}$

وحيث $\overline{أ ط} // \overline{ب ج د}$

$\overline{ب و} \perp \overline{ب ج د}$

$\overline{ك ب}$ مائل على المستوى $\overline{أ ب ج د}$ ، مسقطه $\overline{ب و} \perp \overline{ب ج د}$

$\overline{ك ب} \perp \overline{ب ج د} \iff \overline{ق (ك ب ج د)} = ٩٠^\circ$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل $\overline{ب ك ن ج د}$ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة الشكل $\overline{ب ك ن ج د}$ مستطيل

المثلث $\overline{أ ب ط}$ متساوي الأضلاع وطول ضلعه $\overline{أ ب} = ١٠$ سم $\iff \overline{ب و} = \sqrt{٣} \times ٥$ سم

المثلث $\overline{أ م ع}$ متساوي الأضلاع وطول ضلعه $\overline{أ م} = ٢٠$ سم

$\overline{م ط} = \sqrt{٣} \times ١٠$ سم $\iff \overline{ك و} = \sqrt{٣} \times ٥$ سم

المثلث ك و ب قائم الزاوية في و

$${}^2(ك ب) = {}^2(ك و) + {}^2(و ب) = {}^2(٣\sqrt{٥}) + {}^2(٣\sqrt{٥})$$

$$ك ب = \sqrt{٦٠} \text{ سم}$$

$$\text{مساحة المستطيل ك ب ج ن} = ب ج \times ك ب = ١٠ \times \sqrt{٦٠} = ١٠\sqrt{٦٠} \text{ سم}^2$$